ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026 25/10/2025

Commentaires - Devoir en temps libre n°03

Problème I

Problème très classique, mal traité dans un grand nombre de copies !

1. Beaucoup de maladresses alors qu'il suffit d'adapter la démarche vue pour la condition nécessaire de convergence d'une série. La contraposition était très peu adaptée à la situation puisqu'elle suppose de nier $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, ce que personne n'a réussi à faire correctement. À reprendre pour un très grand nombre.

2. De nombreuses affirmations gratuites avec manipulation de symboles Σ, Π sans détail du sens contenu par ces symboles. Il faut impérativement établir le lien entre série et produit infini en considérant somme partielle et produit partiel et discuter, après application du logarithme, du comportement asymptotique. Il faut mentionner précisément le « critère des équivalents » en soulignant le signe constant plutôt que de rester vague en parlant de comparaison. Nombreuses confusions avec invocation de « sommation de relation de comparaison », hors sujet ici. À revoir pour un grand nombre.

3. Idem (question jumelle de la précédente).

Problème II

1. Pas toujours bien traitée alors qu'il n'y avait aucune difficulté ! Ceux qui optent pour l'usage du théorème des séries alternées doivent impérativement préciser les hypothèses requises.

2. Assez bien traitée mais des confusions notables dans certaines copies, notamment entre convergence de suite et de série. Si le critère des séries alternées n'a pas été employé lors de la première question (il n'y est pas indispensable), alors il doit être détaillé ici. Le contrôle du reste porte sur $|\mathrm{R}_n|$ et non R_n. Ce n'est pas anecdotique !

3. Pas suffisamment abordée, c'est dommage car la question est d'une difficulté raisonnable. Il faut refaire en détail le calcul de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ qui n'est pas officiellement un résultat de cours.

Problème III

1. Bien traitée. Il faut justifier (sommairement) la concavité de th si on veut l'invoquer.

2. Peu abordée et souvent avec beaucoup de maladresse. Montrer la convergence de $(v_n)_n$ vers une limite $\ell \geqslant 0$ est insuffisant puisque l'enjeu est d'établir une limite non nulle pour cette suite.

3. Réussie nulle part ...

Problème IV

On peut considérer un partitionnement du type $[\![\, p^2\,;\,(p+1)^2-1\,]\!]$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ afin de garantir la constance de $k \mapsto \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$ sur cet ensemble d'entiers. Un exercice proche est traité dans la feuille 9. Certains manipulent la somme au sens des familles sommables mais l'hypothèse indispensable permettant cela qu'est la sommabilité n'est pas vérifiée.