

Devoir surveillé n°2 - 4h

Problème I

On pose $\forall x > 0 \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{t} e^{-xt} dt$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.
2. Justifier que $\cos$ est 1-lipschitzienne.
3. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
4. Déterminer une expression de $F(x)$ pour $x > 0$.

Problème II

1. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ décroissante. Montrer que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.
2. En déduire la nature de la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ en fonction de α réel.

En cas de convergence, on pose $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

3. Montrer $\forall \alpha > 1 \quad 1 \leq S(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$

Pour $\alpha > 1$ et n entier non nul, on note $R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

4. Montrer $R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$

5. On pose $\forall x > 0 \quad f(x) = \frac{1}{(1 - \alpha)x^{\alpha-1}}$

Avec une formule de Taylor reste intégral, montrer

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k \quad \text{avec} \quad 0 \leq A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$$

6. En déduire $R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$

Problème III

Partie I

1. Rappeler la définition d'une fonction convexe.
2. Justifier le fait que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. On citera précisément le théorème utilisé.
3. Soient a et b des nombres réels strictement positifs. Soit θ dans l'intervalle $]0, 1[$. Démontrer l'inégalité :

$$a^\theta b^{(1-\theta)} \leq \theta a + (1-\theta)b.$$

Partie II

Soit x un nombre réel strictement positif. Soient u et v deux nombres réels tels que $0 < u < v$.

4. (a) Que vaut $\int_u^v t^{x-1} dt$?
(b) Justifier que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1} dt$ converge absolument. Quelle est sa valeur ?
5. Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ converge absolument.
6. (a) Déterminer la limite lorsque t tend vers 0 de $t^{x/2} \ln t$.
(b) Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 (\ln t) t^{x-1} e^{-t} dt$ converge absolument.
7. On suppose que $x \in [u, v]$.
(a) Justifier que $|(\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}| \leq (\ln t)^2 t^{u-1}$, pour tout t dans $]0, 1[$.
(b) Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt$ converge absolument.
8. Soit F l'application définie par, pour x , un nombre réel strictement positif:

$$F(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$$

Démontrer que F définit une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. Expliciter sous forme d'intégrale sa dérivée et sa dérivée seconde. On citera explicitement le théorème utilisé.

Partie III

9. Soit x un nombre réel strictement positif. Déterminer la limite lorsque t tend vers $+\infty$ de $(\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t/2}$.
10. En déduire que :
(a) l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge absolument.
(b) l'intégrale $\int_1^{+\infty} (\ln t) t^{x-1} e^{-t} dt$ converge absolument.

(c) l'intégrale $\int_1^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt$ converge absolument.

11. Soit G l'application définie par, pour x nombre réel strictement positif:

$$G(x) = \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Démontrer que G définit une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. Expliciter sous forme d'intégrale sa dérivée et sa dérivée seconde.

Partie IV

On peut donc définir la fonction Γ de la variable réelle x strictement positive en posant :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Comme $\Gamma = F + G$, on sait que Γ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

12. En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

13. Calculer la valeur de $\Gamma(1)$.

14. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel n non nul.

15. Justifier que la fonction Γ' admet au moins un zéro situé dans l'intervalle $]1, 2[$. On citera explicitement le théorème utilisé.

16. Justifier que la fonction Γ est une fonction convexe sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

17. Justifier que la fonction Γ' admet un unique zéro, noté α , dans l'intervalle $]0, +\infty[$ et que la fonction Γ admet un minimum global en α .

18. Représenter le graphe de la fonction Γ sur $]0, +\infty[$.

Partie V

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction f , définie sur l'intervalle I et à valeurs dans l'intervalle $]0, +\infty[$, est dite *ln-convexe* si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \theta \in [0, 1], \ln(f(\theta x + (1-\theta)y)) \leq \theta \ln(f(x)) + (1-\theta) \ln(f(y)).$$

La fonction f est donc ln-convexe si et seulement si la fonction $\ln(f)$ est convexe.

19. Soit c un nombre réel. Justifier le fait que la fonction $x \mapsto e^{cx}$ est ln-convexe sur $\mathbb{R}$.

20. Soit f une fonction de l'intervalle I à valeurs dans l'intervalle $]0, +\infty[$ ln-convexe. Démontrer que f est convexe. La réciproque est-elle vraie? Si oui, on justifiera précisément sa réponse et si non, on donnera un contre-exemple.
21. Soit f une fonction de l'intervalle I à valeurs dans l'intervalle $]0, +\infty[$. On suppose que, pour tout nombre réel c strictement positif, la fonction g_c définie pour x dans I par $g_c(x) = e^{cx} f(x)$ est convexe.

Soient x, y dans I , $x < y$, et θ dans $]0, 1[$.

- (a) Justifier $f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta e^{c(1-\theta)(x-y)} f(x) + (1 - \theta) e^{c\theta(y-x)} f(y)$.
- (b) Soit H la fonction définie pour c dans $\mathbb{R}^+$ par : $H(c) = \theta e^{c(1-\theta)(x-y)} f(x) + (1 - \theta) e^{c\theta(y-x)} f(y)$.
- Déterminer la limite de $H(c)$ lorsque c tend vers $+\infty$.
 - On admet que la fonction H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et un calcul élémentaire qu'on ne demande pas de faire montre que sa fonction dérivée H' s'annule en un unique nombre réel c_0 en changeant de signe, le nombre c_0 vérifiant la relation :

$$e^{c_0(x-y)} = \frac{f(y)}{f(x)}.$$

Démontrer que $H(c_0) = f(x)^\theta f(y)^{(1-\theta)}$.

- Etablir le tableau de variations de H . Que représente le point c_0 pour la fonction H ?

(c) Justifier que f est ln-convexe.

22. Soient c et θ des nombres réels strictement positifs. On note $\varphi_{c,\theta}$ la fonction de la variable réelle x définie pour x dans $]0, +\infty[$ par :

$$\varphi_{c,\theta}(x) = \theta^{x-1} e^{-\theta} e^{cx}.$$

Démontrer que $\varphi_{c,\theta}$ est convexe sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

23. En déduire que la fonction Γ est ln-convexe sur $]0, +\infty[$.

Partie VI

Soit g une fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$ telle que :

- g est une fonction ln-convexe
- $\forall x \in]0, +\infty[, g(x+1) = xg(x)$,
- $g(1) = 1$.

On pose $G = \ln g$.

24. Exprimer $g(n)$ en fonction de l'entier naturel n , $n \geq 1$.
25. Soient x dans $]0, 1[$ et n dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

(a) Justifier les inégalités :

$$G(n) - G(n-1) \leq \frac{G(x+n) - G(n)}{x} \leq G(n+1) - G(n) .$$

(b) En déduire que

$$(n-1)^x (n-1)! \leq g(x+n) \leq n^x (n-1)! .$$

Soit n dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et soit x dans $]0, 1]$. On pose :

$$u_n(x) = \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)} .$$

Soit x dans $]0, 1[$.

26. Démontrer pour un entier $n > 2$:

$$\left(\frac{n-1}{x+n-1}\right) u_{n-1}(x) \leq g(x) \leq u_n(x) .$$

27. On se propose de démontrer que la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}}$ converge vers $g(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- (a) Soit α dans $]0, +\infty[$. Justifier que $(1+\alpha)^x - 1 \leq \alpha x$.
- (b) Etudier le sens de variation de la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}}$.
- (c) Conclure.

28. En déduire que $g = \Gamma$.