

Feuille d'exercices n°16

Exercice 1 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$
2. $E = \text{Im } f + \text{Ker } f$
3. $\text{Im } f^2 = \text{Im } f$
4. $\text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$

Corrigé : On a $(1) \Rightarrow (2)$ clairement. Supposons (2). On a toujours $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$. Soit $y \in \text{Im } f$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Et il existe $(a, b) \in E \times \text{Ker } f$ tel que $x = f(a) + b$ d'où $y = f(x) = f(f(a) + b) = f^2(a) \in \text{Im } f^2$. Ainsi, on a $\text{Im } f = \text{Im } f^2$ donc $(2) \Rightarrow (3)$. On a toujours $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$. D'après le théorème du rang et par égalité dimensionnelle, il vient $(3) \Rightarrow (4)$. Enfin, supposons (4). Soit $x \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$. Il existe $t \in E$ tel que $x = f(t)$ et $f^2(t) = f(x) = 0$ d'où $t \in \text{Ker } f^2$. Or $\text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$ d'où $f(t) = 0$ i.e. $x = 0$. Le théorème du rang fournit l'égalité dimensionnelle qui permet de conclure que $(4) \Rightarrow (1)$. Ainsi

Les quatre assertions sont équivalentes.

Exercice 2 (*)

Soient E, F des $\mathbb{K}$ -ev et f, g dans $\mathcal{L}(E, F)^2$ avec $\text{Im } f$ et $\text{Im } g$ de dimension finie. Montrer

$$|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

Corrigé : On a clairement

$$\text{Im}(f + g) = \{f(x) + g(x), x \in E\} \subset \text{Im } f + \text{Im } g = \{f(x) + g(y), (x, y) \in E \times F\}$$

Passant aux dimensions, il vient

$$\text{rg}(f + g) \leq \dim(\text{Im } f + \text{Im } g)$$

D'après la formule de Grassmann, on sait que

$$\dim(\text{Im } f + \text{Im } g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim \text{Im } f \cap \text{Im } g \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

d'où

$$\text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

Ensuite, avec l'inégalité précédemment établie, en remarquant $\text{rg}(-g) = \text{rg}(g)$, il vient

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(f + g - g) \leq \text{rg}(f + g) + \text{rg}(-g) = \text{rg}(f + g) + \text{rg}(g)$$

d'où

$$\text{rg}(f) - \text{rg}(g) \leq \text{rg}(f + g)$$

Par symétrie des rôles en f et g , on a également

$$\text{rg}(g) - \text{rg}(f) \leq \text{rg}(f + g)$$

On conclut

$$|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

Exercice 3 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} (f - \operatorname{id}) = \dim E \iff f \text{ projecteur}$$

Corrigé : Le sens indirect est immédiat puisque si f est projecteur, on a

$$E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$$

Réciproquement, on montre sans difficulté que

$$E = \operatorname{Ker} (f - \operatorname{id}) \oplus \operatorname{Ker} f$$

Par suite, pour $x = a + b$ avec $(a, b) \in \operatorname{Ker} (f - \operatorname{id}) \times \operatorname{Ker} f$, on a $f(x) = a$ d'où f projecteur sur $\operatorname{Ker} (f - \operatorname{id})$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$. Ainsi

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} (f - \operatorname{id}) = \dim E \iff f \text{ projecteur}$$

Exercice 4 (*)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul. On pose

$$\forall M \in E \quad \varphi(M) = M - \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(M) I_n$$

Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ puis calculer φ^2 et $\operatorname{Tr}(\varphi)$.

Corrigé : L'application φ est à valeurs dans E , linéaire par linéarité de la trace et du produit.

On trouve

$$\varphi^2 = \varphi$$

L'application φ est le projecteur sur $\operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(I_n)$. En considérant une base adaptée, on en déduit

$$\operatorname{Tr}(\varphi) = n^2 - 1$$

Exercice 5 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et $H_1, \dots, H_p$ des hyperplans de E . Montrer

$$\dim \bigcap_{i=1}^p H_i \geq n - p$$

Corrigé : Pour $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, il existe φ_k forme linéaire non nulle telle que $H_k = \operatorname{Ker} \varphi_k$. On pose

$$\forall x \in E \quad \Phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x))$$

On a clairement $\Phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}^p)$ et $\operatorname{Ker} \Phi = \bigcap_{i=1}^p \operatorname{Ker} \varphi_i = \bigcap_{i=1}^p H_i$. Or, on a aussi $\operatorname{Im} \Phi$ sev de $\mathbb{K}^p$ d'où $\operatorname{rg}(\Phi) \leq p$ et d'après le théorème du rang

$$\dim E = \operatorname{rg}(\Phi) + \dim \operatorname{Ker} \Phi$$

On conclut

$$\dim \bigcap_{i=1}^p H_i = \dim \operatorname{Ker} \Phi = n - \operatorname{rg}(\Phi) \geq n - p$$

Exercice 6 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, $u \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur de E . Montrer

$$u \circ p = p \circ u \iff u(\text{Im } p) \subset \text{Im } p \quad \text{et} \quad u(\text{Ker } p) \subset \text{Ker } p$$

Corrigé : Supposons $u \circ p = p \circ u$. Pour $x \in E$, on a $u(p(x)) = p(u(x)) \in \text{Im } p$ ce qui prouve $u(\text{Im } p) \subset \text{Im } p$ et pour $x \in \text{Ker } p$, on a $p(u(x)) = u(p(x)) = 0_E$ d'où $u(\text{Ker } p) \subset \text{Ker } p$. Réciproquement, soit $x \in E$. On décompose $x = a + b$ avec $(a, b) \in \text{Im } p \times \text{Ker } p$. Sachant $\text{Im } p = \text{Ker } \text{id} - p$, on a $p(a) = a$ et par stabilité, on a $u(a) \in \text{Im } p$ et $u(b) \in \text{Ker } p$. Ainsi

$$u \circ p(x) = u(p(a)) = u(a) \quad \text{et} \quad p \circ u(x) = p(u(a)) = u(a)$$

On conclut

$$u \circ p = p \circ u \iff u(\text{Im } p) \subset \text{Im } p \quad \text{et} \quad u(\text{Ker } p) \subset \text{Ker } p$$

Exercice 7 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension fini n et F un sev de E avec $\dim F = r$. On note

$$\Lambda = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u(F) \subset F\}$$

Vérifier que Λ est un sev de $\mathcal{L}(E)$ puis déterminer $\dim \Lambda$.

Corrigé : L'ensemble Λ est clairement un sev de $\mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}_F$ base de F complétée en $\mathcal{B}$ base de E . On a

$$u \in \Lambda \iff \text{mat}_{\mathcal{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$. L'application $u \mapsto \text{mat}_{\mathcal{B}} u$ réalisant un isomorphisme, la dimension de Λ est la dimension de l'ensemble des matrices de la forme souhaitée et on conclut

$$\dim \Lambda = r^2 + (n-r)r + (n-r)^2$$

Exercice 8 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n entier non nul et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E telles que

$$\Phi : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{K}^n \\ x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \end{cases}$$

est un isomorphisme. On pose $F_i = \bigcap_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i\}} \text{Ker } \varphi_k$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

1. Justifier que pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, φ_k est une forme linéaire non nulle.

2. Montrer que

$$\sum_{k=1}^n F_k = \bigoplus_{k=1}^n F_k$$

3. Établir

$$\bigoplus_{k=1}^n F_k = E$$

Corrigé : 1. Notons $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme Φ est un isomorphisme, on a

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \exists ! x_k \in E \quad | \quad \Phi(x_k) = e_k$$

En particulier

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \varphi_k(x_k) = 1$$

Ainsi

Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, φ_k est une forme linéaire non nulle.

2. Soit $(x_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \in \prod_{i=1}^n F_i$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i = 0_E$. Pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, comme $x_i \in F_i$, on a

$$\forall (i, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad \text{avec} \quad i \neq k \quad \varphi_k(x_i) = 0$$

Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Il vient $\varphi_k\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n \varphi_k(x_i) = \varphi_k(x_k) = 0$

Ainsi

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \varphi_i(x_k) = 0$$

ce qui équivaut à

$$x_k \in \bigcap_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \text{Ker } \varphi_i = \text{Ker } \Phi = \{0_E\}$$

puisque Φ est injectif (car bijectif). On a donc montré la nullité des x_k ce qui prouve

$$\sum_{k=1}^n F_k = \bigoplus_{k=1}^n F_k$$

3. Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Le sev F_k est une intersection de $n - 1$ noyaux de formes linéaires non nulles autrement dit c'est une intersection de $n - 1$ hyperplans d'où

$$\dim F_k \geq n - (n - 1) = 1$$

Par suite

$$\dim \bigoplus_{k=1}^n F_k = \sum_{k=1}^n \dim F_k \geq \sum_{k=1}^n 1 = n$$

et donc

$$\begin{cases} \bigoplus_{k=1}^n F_k \subset E \\ n \leq \dim \bigoplus_{k=1}^n F_k \leq \dim E = n \end{cases}$$

Il en résulte

$$\bigoplus_{k=1}^n F_k = E$$

Exercice 9 (**)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg}(M) = 1$. Déterminer une expression simple de M^2 en fonction de M .

Corrigé : Comme $\text{rg } M = 1$, il existe des matrices colonnes non nulles X et Y telles que $M = XY^\top$. Par suite, avec l'associativité du produit matriciel, il vient

$$M^2 = (XY^\top)(XY^\top) = X \underbrace{(Y^\top X)}_{\in \mathbb{K}} Y^\top = (Y^\top X)M$$

Or, d'après la propriété fondamentale de la trace, on a

$$\text{Tr}(M) = \text{Tr}(XY^\top) = \text{Tr}(Y^\top X) = Y^\top X$$

Ainsi

$$M^2 = \text{Tr}(M)M$$

Exercice 10 (*)

Soient α, β dans $\mathbb{K}$ et $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour avoir A semblable à B .

Corrigé : Supposons A et B semblables. Alors, les matrices ont même trace et même déterminant d'où

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha\beta = -\alpha\beta \end{cases}$$

et par conséquent $\alpha = \beta = 0$. La réciproque est immédiate et on conclut

Les matrices $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables si et seulement si $\alpha = \beta = 0$.

Remarque : On peut aussi invoquer l'égalité $\chi_A = \chi_B$, ou aussi A^2 semblable à $B^2 \dots$

Exercice 11 (**)

Soit n entier et $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Montrer que $\mathcal{B} = (P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer les coordonnées de la base canonique $\mathcal{C} = (X^k)_{0 \leq k \leq n}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Corrigé : Les polynômes P_k sont échelonnées en valuation et forme donc une famille libre de $n + 1$ vecteurs dans un espace de dimension $n + 1$ ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Puis, pour $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a

$$X^j = X^j(1 - X + X)^{n-j} = X^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (1 - X)^k X^{n-j-k} = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (1 - X)^k X^{n-k}$$

Ainsi

La famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et on a $X^j = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} P_{n-k}$ pour $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Remarque : On peut aussi observer que la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de cardinal égal à $\dim \mathbb{R}_n[X]$ pour conclure qu'il s'agit d'une base.

Exercice 12 (**)

Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Corrigé : Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$ ce qui équivaut à $AP = PB$. Notons $P_1 = \operatorname{Re} P$ et $P_2 = \operatorname{Im} P$. Ainsi, on a $AP_1 = P_1B$ et $AP_2 = P_2B$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{C} \quad \varphi(t) = \det(P_1 + tP_2)$$

On a φ polynomiale en t et $\varphi(i) = \det(P_1 + iP_2) = \det P \neq 0$. Par suite, il existe α réel tel que $\varphi(\alpha) \neq 0$ (sinon, φ aurait une infinité de racines et serait donc le polynôme nul). Il s'ensuit

$$A(P_1 + \alpha P_2) = (P_1 + \alpha P_2)B \quad \text{et} \quad \det(P_1 + \alpha P_2) \neq 0$$

On conclut

A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad N_k = \text{Ker } f^k \quad I_k = \text{Im } f^k$$

1. Montrer que les suites $(I_k)_k$ et $(N_k)_k$ sont respectivement décroissante et croissante et qu'elles sont simultanément stationnaires.
2. On note r le rang à partir duquel les suites stationnent. Montrer $E = I_r \oplus N_r$.
3. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & N \end{array} \right)$ où C une matrice carrée inversible et N est une matrice carré nilpotente.

Corrigé : 1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in E$. On a

$$f^k(x) = 0_E \implies f(f^k(x)) = f^{k+1}(x) = 0_E \quad \text{et} \quad y = f^{k+1}(x) \implies y = f^k(f(x))$$

D'où $\text{Ker } f^k \subset \text{Ker } f^{k+1} \quad \text{et} \quad \text{Im } f^{k+1} \subset \text{Im } f^k$

Ainsi

La suite $(N_k)_k$ croît et la suite $(I_k)_k$ décroît.

Il s'ensuit que les suite $(\dim N_k)_k$ et $(\dim I_k)_k$ sont respectivement croissantes et décroissantes. Comme $(\dim I_k)_k$ est décroissante à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle est stationnaire à partir d'un certain rang et d'après le théorème du rang, la suite $(\dim N_k)_k$ est stationnaire à partir du même rang. Par inclusion et égalité des dimensions, on conclut

Les suites $(I_k)_k$ et $(N_k)_k$ sont simultanément stationnaires.

Remarque : On peut établir un résultat plus précis : la stricte monotonie de ces suites avant la stationnarité. En effet, supposons qu'il existe $\ell < r$ tel que $N_\ell = N_{\ell+1}$. On établit alors par récurrence $N_k = N_{k+1}$ pour tout $k \geq \ell$. En effet, soit $x \in N_{k+2}$, alors $f(x) \in N_{k+1} = N_k$ d'où $x \in N_{k+1}$. On en déduit que la suite $(N_k)_k$ stationne à partir de ℓ avec $\ell < r$ ce qui est absurde.

2. Soit $x \in I_r \cap N_r$. On a

$$f^r(x) = 0_E \quad \text{et} \quad x = f^r(t) \quad \text{avec} \quad t \in E$$

Par suite, on a $f^r(x) = f^{2r}(t) = 0_E$ d'où $t \in N_{2r}$. Or la suite $(N_k)_k$ stationne à partir de r d'où $N_{2r} = N_r$ et par conséquent $t \in N_r$ et donc $x = f^r(t) = 0_E$. Le théorème du rang donne

$$\dim I_r + \dim N_r = \dim E$$

On conclut

$E = I_r \oplus N_r$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A . Si la matrice A est inversible, le résultat est immédiat avec une matrice N vide. On suppose A non inversible d'où $r \geq 1$. Les sous-espaces I_r et N_r sont clairement stables par f . Notant $\mathcal{B} = \mathcal{B}_I \cup \mathcal{B}_N$ une base adaptée à la somme directe $E = I_r \oplus N_r$, on en déduit la forme diagonale par blocs de $\text{mat}_{\mathcal{B}} f$. Notons respectivement f_{I_r} et f_{N_r} les endomorphismes induits par f respectivement sur I_r et N_r . On a clairement $(f_{N_r})^r = 0$ d'où $N = \text{mat}_{\mathcal{B}_N} f_{N_r}$ matrice nilpotente. Puis

$$\text{Ker } f_{I_r} = N_1 \cap I_r \subset N_r \cap I_r = \{0_E\}$$

D'où f_{I_r} injectif et donc bijectif. On peut aussi rédiger $f_{I_r}(I_r) = I_r$ par stationnarité d'où la surjectivité et donc la bijectivité. Ainsi, la matrice $C = \text{mat}_{\mathcal{B}_I} f_{I_r}$ est inversible et comme A et $\text{mat}_{\mathcal{B}} f$ sont les matrices d'un même endomorphisme dans des bases éventuellement distinctes, on conclut

A semblable à $\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & N \end{array} \right)$ avec C inversible et N nilpotente

Exercice 14 (**)

Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$. Montrer

$$p \circ q = p \quad \text{et} \quad q \circ p = q \iff p, q \text{ projecteurs} \quad \text{et} \quad \text{Ker } p = \text{Ker } q$$

Corrigé : Supposons $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$. Puis, par associativité, il vient $p^2 = (p \circ q) \circ p = p \circ (q \circ p) = p \circ q = p$ d'où p projecteur et

$$x \in \text{Ker } p \implies p(x) = 0_E \implies (q \circ p)(x) = 0_E \implies q(x) = 0_E$$

autrement dit $\text{Ker } p \subset \text{Ker } q$ et par symétrie des rôles, on a l'autre inclusion d'où le sens direct. Réciproquement, soit $x \in E$. On a $(\text{id} - q)(x) \in \text{Ker } q = \text{Ker } p$ d'où

$$p(x) = p(q(x)) + q((\text{id} - q)(x)) = (p \circ q)(x)$$

et de même pour l'autre égalité par symétrie des rôles. On conclut

$p \circ q = p \quad \text{et} \quad q \circ p = q \iff p, q \text{ projecteurs} \quad \text{et} \quad \text{Ker } p = \text{Ker } q$
