

Feuille d'exercices n°17

Exercice 1 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n (non nul) et $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\text{rg}(u) \leq r \leq n-1$. Montrer que u est composé d'endomorphismes de rang r .

Corrigé : Notons $s = \text{rg}(u)$. Si $s = r$, le résultat est trivial. Supposons $0 \leq s < r$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \text{mat}_{\mathcal{B}} u$. On dispose de P, Q dans $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$A = PJ_sQ \quad \text{avec} \quad J_s = \sum_{i=1}^s E_{i,i}$$

Posons $\forall \ell \in \llbracket s+1; r+1 \rrbracket \quad K_\ell = J_s + \sum_{i \in \llbracket s+1; r+1 \rrbracket \setminus \{\ell\}} E_{i,i}$

Par construction, on a

$$\forall \ell \in \llbracket s+1; r+1 \rrbracket \quad \text{rg } K_\ell = r \quad \text{et} \quad \prod_{\ell=s+1}^{r+1} K_\ell = J_s$$

Le produit contient au moins deux termes puisque $s < r$ par hypothèse. Par suite

$$A = P \left(\prod_{\ell=s+1}^{r+1} K_\ell \right) Q = PK_{s+1} \left(\prod_{s+1 < \ell < r+1} K_\ell \right) K_{r+1}Q$$

et $\forall \ell \in \llbracket s+1; r+1 \rrbracket \quad \text{rg}(PK_{s+1}) = \text{rg } K_\ell = \text{rg}(K_{r+1}Q) = r$

En considérant les endomorphismes dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont respectivement PK_{s+1} , K_ℓ avec $s+1 < \ell < r+1$ et $K_{r+1}Q$, on conclut

L'endomorphisme u est composé d'endomorphismes de rang r .

Exercice 2 (**)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec n entier non nul. Pour $P \in E$, on pose $\varphi(P) = X(X-1)P' - nXP$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Préciser $\text{mat}_{\mathcal{C}} \varphi$ où $\mathcal{C}$ désigne la base canonique de E .
2. Déterminer des bases de $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$.

Corrigé : 1. L'application φ est linéaire par linéarité du produit à gauche et de la dérivation. On a

$$\varphi(1) = -nX \in E$$

et $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \varphi(X^k) = (k-n)X^{k+1} - kX^k$

d'où $\varphi(X^k) \in E$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, y compris le cas $k = n$ puisque le coefficient devant le terme en X^{n+1} s'annule. Par caractérisation d'une application linéaire sur une base, on conclut

$\varphi \in \mathcal{L}(E)$

Et on a

$$\text{mat}_{\mathcal{E}}\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -n & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -(n-1) & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -n \end{pmatrix}$$

2. On a $P \in \text{Ker } \varphi \iff X[(X-1)P' - nP] = 0 \iff (X-1)P' - nP = 0$

Réolvons l'équation différentielle associée sur $]1; +\infty[$ et cherchons des solutions polynomiales :

$$(t-1)x'(t) - nx(t) = 0 \iff x \in \text{Vect}(t \mapsto (t-1)^n)$$

D'où

$$\boxed{\text{Ker } \varphi = \text{Vect}((X-1)^n)}$$

Puis, la famille $(\varphi(X^k))_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est génératrice de $\text{Im } \varphi$. D'après le théorème du rang, on cherche à extraire une famille libre de cardinal n de la famille génératrice précédente. Le caractère échelonnée montre que les familles $(\varphi(X^k))_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket}$ et $(\varphi(X^k))_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ font l'affaire mais on peut fournir une base plus simple encore. Par lecture matricielle, on observe

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \varphi(X^k) \in \text{Vect}(X, \dots, X^n)$$

d'où

$$\text{Im } \varphi \subset \text{Vect}(X, \dots, X^n)$$

Par égalité des dimensions, on conclut

$$\boxed{\text{La famille } (X, \dots, X^n) \text{ est une base de } \text{Im } \varphi.}$$

Exercice 3 (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$. Montrer que A est semblable à B avec

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Corrigé : Supposons le problème résolu. Notant $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A , il existe une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E telle que $u(\varepsilon_i) = \varepsilon_{i-1}$ pour $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$ et $u(\varepsilon_1) = 0$, autrement dit $\varepsilon_i = u^{n-i}(\varepsilon_n)$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Il suffit alors de choisir $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. La famille $(u^{n-1}(x), \dots, x)$ est libre. En effet, soit $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ une famille de scalaires tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x) = 0_E$. On suppose les α_k non tous nuls et on pose $p = \min \{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \mid \alpha_k \neq 0\}$. On a

$$u^{n-p-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x) \right) = \alpha_p u^{n-1}(x) + 0_E = 0 \implies \alpha_p = 0$$

ce qui est en contradiction avec le choix de p . Enfin, dans cette base, la matrice $\text{mat}_{\mathcal{B}}u$ a la forme souhaitée.

$$\boxed{\text{Les matrices } A \text{ et } B \text{ sont semblables.}}$$

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ (n entier non nul) une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et on pose

$$\Phi : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{K}^n \\ x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \end{cases}$$

1. Préciser $\dim E$.
2. Justifier que Φ est un isomorphisme.
3. En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad \varphi_i(\varepsilon_j) = \delta_{i,j}$$

Corrigé : 1. On a $\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E \times \dim \mathbb{K} = \dim E$ puisque $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$ -ev de dimension 1. Comme $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ admet une base de cardinal n , il s'ensuit

$$\boxed{\dim E = n}$$

2. Soit $x \in \text{Ker } \Phi \setminus \{0_E\}$. Il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ tel que $\varphi(x) \neq 0$. Or, il existe des scalaires α_i tels que $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$ et $\varphi(x) \neq 0$ est alors absurde. On conclut que $\text{Ker } \Phi = \{0_E\}$ d'où l'injectivité et donc la bijectivité pour raison de dimension. Ainsi

$$\boxed{\text{L'application } \Phi \text{ est un isomorphisme de } E \text{ sur } \mathbb{K}^n.}$$

3. Soit $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et on pose

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \varepsilon_i = \Phi^{-1}(e_i)$$

Par construction, on a exactement

$$\boxed{\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad \varphi_i(\varepsilon_j) = \delta_{i,j}}$$

Remarque : La base $\mathcal{B}$ ainsi construite s'appelle la base *antédurale* de la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Exercice 5 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n entier non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ base de E . On pose

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid v \circ u = u \circ v\}$$

1. Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer $\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}_{n-1}[u]$
3. Déterminer $\dim \mathcal{C}(u)$.

Corrigé : 1. On vérifie sans difficulté que $\text{id} \in \mathcal{C}(u)$, $\mathcal{C}(u)$ sev de $\mathcal{L}(E)$ et $v \circ w \in \mathcal{C}(u)$ pour v, w dans $\mathcal{C}(u)$. Ainsi

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{C}(u) \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{L}(E).}$$

2. On a clairement $\mathbb{K}_{n-1}[u] \subset \mathcal{C}(u)$. Réciproquement, soit $v \in \mathcal{C}(u)$. Le vecteur $v(x_0)$ se décompose dans la base $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ en

$$v(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) \quad \text{avec} \quad (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$$

Soit $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. Comme v commute avec u , alors v commute avec u^i pour tout $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ puis

$$\begin{aligned} v(u^i(x_0)) &= u^i \circ v(x_0) = u^i \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) \right) \\ &= u^i \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k \right) (x_0) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k \right) (u^i(x_0)) \end{aligned}$$

Ainsi, les endomorphismes v et $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$ coïncident sur la base $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ et sont donc égaux ce qui prouve l'inclusion directe. On conclut

$$\boxed{\mathcal{C}(u) = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k, (a_i)_{i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} \in \mathbb{K}^n \right\}}$$

Variante : Soit $x \in E$. Il existe $(b_k)_{0 \leq k \leq n-1} \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k(x_0)$. Ainsi

$$\begin{aligned} v(x) &= v \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k(x_0) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k v \circ u^k(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k \circ v(x_0) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell u^\ell(x_0) \right) = \sum_{0 \leq k, \ell \leq n-1} a_\ell b_k u^{k+\ell}(x_0) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell u^\ell(x) \end{aligned}$$

3. D'après ce qui précède, la famille $(u^k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket}$ est génératrice de $\mathcal{C}(u)$. Montrons sa liberté.

Soit $(a_k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^{k-1} = 0$. En particulier, en évaluant en x_0 , il vient

$\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) = 0$. Or la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E donc libre et par suite

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) = 0 \implies \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad a_k = 0$$

Ainsi, la famille $(u^k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket}$ est libre et génératrice de $\mathcal{C}(u)$ donc est une base de $\mathcal{C}(u)$. Son cardinal étant égal à n , on conclut

$$\boxed{\dim \mathcal{C}(u) = n}$$

Exercice 6 (***)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec n entier non nul, $A \in E$. Résoudre en l'inconnue $X \in E$ l'équation

$$X + X^\top = \text{Tr}(X)A \tag{L}$$

Corrigé : Soit X solution de (L). On a

$$X + X^\top = \text{Tr}(X)A \implies \text{Tr}(X + X^\top) = \text{Tr}(X) \times \text{Tr}(A) \implies \text{Tr}(X)(2 - \text{Tr}(A)) = 0$$

• Si $\text{Tr}(X) = 0$, alors $X + X^\top = 0$ d'où $X \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et réciproquement, une matrice antisymétrique est solution de (E).

• Si $\text{Tr}(X) \neq 0$, alors $\text{Tr}(A) = 2$. On pose

$$\forall X \in E \quad \varphi(X) = \frac{1}{2}(X + X^\top)$$

Par analyse/synthèse, on a la décomposition de $X \in E$ dans la somme directe $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$X = \underbrace{\frac{1}{2}(X + X^\top)}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{1}{2}(X - X^\top)}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$$

Il s'ensuit que φ est le projecteur sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On a

$$X + X^\top = \text{Tr}(X)A \iff \varphi(X) = \frac{\text{Tr}(X)}{2}A$$

Comme $\text{Tr}(X) \neq 0$, on a $A \in \text{Im } \varphi = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et d'après les propriétés d'un projecteur,

$$\varphi\left(\frac{\text{Tr}(X)}{2}A\right) = \frac{\text{Tr}(X)}{2}A$$

Il s'ensuit
$$\varphi(X) = \frac{\text{Tr}(X)}{2}A \iff X - \frac{\text{Tr}(X)}{2}A \in \text{Ker } \varphi = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

D'où
$$X = \lambda A + B \quad \text{avec} \quad (\lambda, B) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Réciproquement, on a

$$\forall (\lambda, B) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(\lambda A + B) = \lambda A = \frac{\text{Tr}(\lambda A + B)}{2}A$$

Notant S_E l'ensemble des solutions de E, on conclut

Si $\text{Tr}(A) \neq 2$ ou $A \notin \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $S_L = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et sinon $S_L = \{\lambda A + B, B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\}$.

Exercice 7 (**)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul et $(A, B) \in E^2$. On pose

$$\forall M \in E \quad \Phi(M) = AM - MB$$

1. Vérifier que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.

2. Montrer
$$\forall (M, p) \in E \times \mathbb{N} \quad \Phi^p(M) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k A^{p-k} M B^k$$

3. Montrer que si A et B sont nilpotentes, alors Φ l'est aussi.

Corrigé : 1. L'application Φ est valeurs dans E par définition des opérations matricielles et par linéarité du produit à gauche et à droite et de la somme, on conclut

$$\Phi \in \mathcal{L}(E)$$

2. On pose $f(M) = AM$ et $g(M) = MB$ pour tout $M \in E$. Les applications f et g sont également des endomorphismes de E et on observe

$$\forall M \in E \quad f \circ g(M) = AMB = g \circ f(M)$$

autrement dit f et g commutent. D'après la formule du binôme, on a

$$\Phi^p = (f - g)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k f^{p-k} \circ g^k$$

Ainsi

$$\forall (M, p) \in E \times \mathbb{N} \quad \Phi^p(M) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k A^{p-k} M B^k$$

3. Si $A^p = 0$ et $B^q = 0$, alors pour $k \in \llbracket 0; p+q \rrbracket$, on a $k \geq p$ ou $p+q-k \geq q$ d'où $\Phi^{p+q} = 0$. On conclut

Si A et B sont nilpotentes, alors Φ l'est aussi.

Exercice 8 (***)

1. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(x, f(x))$ est liée pour tout $x \in E$. Montrer que f est une homothétie.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Corrigé : 1. Considérons $x \neq 0_E$. On a $(x, f(x))$ liée d'où l'existence d'un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$. Soit $y \in E$ tel que (x, y) libre. On a $y \neq 0_E$ et $x + y \neq 0_E$ par liberté et aussi

$$f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y) = \lambda_x x + \lambda_y y \implies \lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$$

Soit $y \in E$ non nul colinéaire à x . On a $y = \alpha x$ avec α scalaire non nul et

$$f(y) = \lambda_y \alpha x = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x \implies \lambda_y = \lambda_x$$

Ainsi, le scalaire λ_x ne dépend pas du choix de x non nul et pour $x = 0_E$, le résultat vaut aussi d'où

$$\boxed{f \in \text{Vect}(\text{id})}$$

2. On procède par récurrence en supposant le résultat vrai pour une matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$. Si A est nulle, le résultat est trivial. On suppose $A \neq 0$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A . On a $f \notin \text{Vect}(\text{id})$. Sinon, on aurait $\text{Tr}(f) = n\lambda = 0$ d'où $\lambda = 0$ donc $f = 0$ ce qui est exclu. D'après ce qui précède, il existe $x \in E$ non nul tel que $(x, f(x))$ libre. En complétant en $\mathcal{B}$ une base de E , on a

$$M = \text{mat}_{\mathcal{B}} f = \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline U & A' \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

et $\text{Tr}(f) = \text{Tr}(A') = 0$ avec $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Par hypothèse de récurrence, A' est semblable à une matrice $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ de trace nulle. Donc, il existe $P \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ tel que $B = PA'P^{-1}$.

Posant $Q = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array} \right)$, on a Q inversible avec $Q^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array} \right)$ et un produit par blocs donne

$$QMQ^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline U & A' \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & LP^{-1} \\ \hline PU & PA'P^{-1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & LP^{-1} \\ \hline PU & B \end{array} \right)$$

qui est de diagonale nulle ce qui clôt la récurrence. Ainsi

$$\boxed{\text{Une matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.}}$$

Exercice 9 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et $u_1, \dots, u_n$ des endomorphismes nilpotents de E qui commutent deux à deux. Que vaut $u_1 \circ \dots \circ u_n$?

Corrigé : On procède par récurrence forte sur $n = \dim E$. L'initialisation pour $n = 1$ est immédiate. Supposons le résultat vrai jusqu'à n entier non nul fixé. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension $n + 1$ et $u_1, \dots, u_{n+1}$ des endomorphismes nilpotents commutant deux à deux. Le sev $\text{Im } u_{n+1}$ est stable par $u_1, \dots, u_n$ et notant v_i l'endomorphisme induit par u_i sur $\text{Im } u_{n+1}$, on vérifie sans difficulté que les v_i sont nilpotents, commutent et que $u_1 \circ \dots \circ u_n$ induit $v_1 \circ \dots \circ v_n$ sur $\text{Im } u_{n+1}$. Or, on a $\dim \text{Ker } u_{n+1} \geq 1$ par nilpotence de u_{n+1} d'où $\text{rg } u_{n+1} \leq n$ d'après le théorème du rang.

Notant $r = \text{rg } u_{n+1}$, on a par hypothèse de récurrence $v_1 \circ \dots \circ v_r = 0$ avec $r \leq n$ et par suite $u_1 \circ \dots \circ u_{n+1} = 0$ ce qui clôt la récurrence. On conclut

$$\boxed{u_1 \circ \dots \circ u_n = 0}$$

Exercice 10 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E . On pose

$$\forall x \in E \quad \Phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$$

Montrer Φ surjective $\iff (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ libre

Corrigé : Supposons Φ surjective. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i = 0$. On note $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Par surjectivité, pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $x_i \in E$ tel que $\Phi(x_i) = e_i$. Par suite

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{\varphi_i(x_k)}_{\delta_{i,k}} = \alpha_k = 0$$

d'où la liberté de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Supposons φ non surjective. On a donc $\text{rg } \Phi < n$. Par conséquent, on peut trouver un hyperplan H de $\mathbb{K}^n$ contenant $\text{Im } \Phi$. On dispose de $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ tel que H est décrit par l'équation $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$. Comme $\text{Im } \Phi \subset H$, on a

$$\forall x \in E \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x) = 0$$

d'où $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i = 0$

ce qui prouve le caractère lié de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. On conclut

$$\boxed{\Phi \text{ surjective} \iff (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \text{ libre}}$$

Exercice 11 (***)

Déterminer les sev stables pour l'endomorphisme dérivation de $\mathbb{K}[X]$.

Corrigé : Les sev $\{0\}$, $\mathbb{K}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{K}[X]$ sont clairement stables par D . Montrons que ce sont les seuls. Soit F un sev de $\mathbb{K}[X]$ stable par D avec $F \neq \{0\}$. Supposons que $\{\deg P, P \in F \setminus \{0\}\}$ est majoré et notons n son maximum. Ainsi, on a $F \subset \mathbb{K}_n[X]$. Soit $P \in F$ tel que $n = \deg P$. On a $P^{(k)} \in F$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et $(P^{(k)})_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est échelonnée en degré, formée de polynômes non nuls, donc libre. Par conséquent, on a $n+1 \leq \dim F \leq \dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$ d'où $F = \mathbb{K}_n[X]$. Si $\{\deg P, P \in F \setminus \{0\}\}$ n'est pas majoré, alors pour tout n entier, il existe $P \in F$ tel que $\deg P = p \geq n$ et par suite $F \supset \mathbb{K}_p[X] \supset \mathbb{K}_n[X]$ pour tout n entier d'où $F = \mathbb{K}[X]$. Ainsi

$$\boxed{\text{Les sev stable par dérivation sont exactement les } \mathbb{K}_n[X] \text{ avec } n \text{ entier, } \{0\} \text{ et } \mathbb{K}[X].}$$

Exercice 12 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que u admet au moins deux sev stables.
2. On suppose u non nul et non injectif.
 - (a) Montrer que u admet au moins trois sev stables.
 - (b) Si $\dim E$ est impaire, montrer que u admet au moins quatre sev stables.
 - (c) Donner un exemple d'endomorphisme qui admet exactement trois sev stables.

Corrigé : 1. $\{0_E\}$ et E sont des sev stables.

2.(a) On a $\text{Ker } u \neq \{0_E\}$ et $\text{Ker } u \neq E$. Par ailleurs, on a sans difficulté $u(\text{Ker } u) \subset \text{Ker } u$. Ainsi

L'endomorphisme u admet au moins trois sev stables.

2.(b) De même, on vérifie que $\text{Im } u$ est stable par u . D'après le théorème du rang, on a

$$\dim \text{Im } u = \dim E - \dim \text{Ker } u < \dim E$$

et $\text{Im } u \neq \{0_E\}$ puisque u non nul. Enfin, si $\text{Ker } u = \text{Im } u$, alors $\dim E = 2 \text{rg}(u)$ est paire ce qui est faux. Par conséquent

Les sev $\{0\}$, E , $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont quatre sev stables distincts.

2.(c) On a va précisément choisir u tel que $\text{Ker } u = \text{Im } u$. On considère u canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.