ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Programme de colles

⚠ Venir avec un cahier de colles : y coller les énoncés des exercices et les reprendre à l'issue de la colle.

Semaine 6 03/11/25 - 07/11/25

Programme :

Réduction :

- Polynôme d'endomorphisme ou de matrice, morphisme d'algèbres $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(u)$, $\mathbb{K}[u]$ algèbre commutative, idéal des polynômes annulateurs de u, lemme des noyaux ;
- Valeur propre, vecteur propre, droite stable par un endomorphisme, sous-espace propre, polynôme d'endomorphisme et valeur propre, valeurs propres parmi les racines d'un polynôme annulateur ;
- si $u \circ v = v \circ u$, alors Im u et Ker u sont stables par v ;
- Endomorphisme induit sur un sous-espace propre ;
- Une somme de sous-espaces propres est directe, toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre ;
- Polynôme caractéristique, les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique, spectre d'un endomorphisme (en dimension finie) et d'une matrice, polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit ;
- Multiplicité d'une valeur propre, encadrement de la dimension d'un sous-espace propre ;
- Théorème de Cayley-Hamilton ;
- Polynôme minimal, divisibilité du polynôme caractéristique, racines du polynôme minimal, dimension de $\mathbb{K}[u]$;
- Diagonalisation, caractérisations de la diagonalisabilité, condition suffisante de diagonalisation, polynôme annulateur scindé à racines simples, endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable ;
- Trigonalisation, polynôme caractéristique scindé, déterminant et trace d'un endomorphisme trigonalisable, techniques de trigonalisation en dimension deux et trois ;
- Nilpotence, indice de nilpotence, trigonalisable et de spectre réduit à $\{0\}$, matrice triangulaire supérieure stricte ;
- Polynôme minimal ou polynôme annulateur scindé, matrice trigonalisable semblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs $\lambda \mathrm{I}_r + \mathrm{T}$ où T triangulaire supérieure stricte ou $\lambda \mathrm{I}_r + \mathrm{N}$ avec N nilpotente, sous-espaces caractéristiques ;
- Applications : calcul d'une puissance p-ième, récurrences croisées, suites récurrentes linéaires.

Questions de cours : (avec preuve)

1. Théorème de diagonalisation (avec les espaces propres) ;
2. Condition suffisante de diagonalisation ;
3. Diagonalisation de $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

4. Caractérisation de la diagonalisation avec le polynôme minimal (ou un polynôme annulateur) scindé à racines simples ;
5. Polynôme minimal et diagonalisabilité de l'endomorphisme induit sur un sev stable (prop. 26 et th. 14) ;
6. Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé ;
7. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas trigonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ mais est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$;
8. Trigonalisation de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
9. Majoration de l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent (les deux preuves) ;
10. Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable de spectre réduit à $\{0\}$ (preuve et la variante de la réciproque) ;
11. Caractérisation d'un endomorphisme trigonalisable avec le polynôme minimal (ou un polynôme annulateur) scindé et décomposition de l'espace en somme directe de sev stables sur lesquels l'endomorphisme induit une homothétie + un nilpotent.