

Feuille d'exercices n°27

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (***)

On note $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de carré sommable, *i.e* telles que $\sum |u_n|^2$ converge. Montrer que $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -ev normé par

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$$

Corrigé : La suite nulle appartient à $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Pour $(u_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a clairement $\lambda(u_n)_n = (\lambda u_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. On utilise le résultat suivant

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \iff (a - b)^2 \geq 0$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq |u_n + v_n|^2 \leq (|u_n| + |v_n|)^2 \leq 2(|u_n|^2 + |v_n|^2)$

Comme $\sum |u_n|^2$ et $\sum |v_n|^2$ convergent, il s'ensuit que $\sum (|u_n|^2 + |v_n|^2)$ converge et par comparaison, on a donc $\sum |u_n + v_n|^2$ convergente. Ainsi

L'espace $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est un sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ donc un $\mathbb{K}$ -ev.

L'homogénéité et la séparation pour $\|\cdot\|_2$ sont immédiates. Soit N entier. Pour $(u, v) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})^2$, notant $u^N = (u_n \delta_{n \leq N})_n$ et $v^N = (v_n \delta_{n \leq N})_n$, on a

$$\|u^N + v^N\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^N |u_n + v_n|^2}$$

D'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}^{N+1}$ muni de la norme deux, il vient

$$\|u^N + v^N\|_2 \leq \sqrt{\sum_{n=0}^N |u_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=0}^N |v_n|^2} \leq \|u\|_2 + \|v\|_2$$

Faisant tendre $N \rightarrow +\infty$, l'inégalité triangulaire s'en déduit et on conclut que

L'espace $(\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$ est un espace normé.

Exercice 2 (***)

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0; 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ muni de

$$\forall f \in E \quad N_1(f) = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty} + \|f''\|_{\infty} \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f'' + 2f' + f\|_{\infty}$$

Justifier que N_1 et N_2 sont des normes puis les comparer.

Corrigé : L'application N_1 est clairement une norme. Pour l'application N_2 , seul la propriété de séparation n'est pas immédiate. Soit $f \in E$ telle que $N_2(f) = 0$. Il s'ensuit

$$\begin{cases} f'' + 2f' + f = 0 \\ f(0) = f'(0) = 0 \end{cases}$$

D'après le théorème de Cauchy linéaire, la fonction nulle est l'unique solution et par suite

Les applications N_1 et N_2 sont des normes.

Remarque : Sans le théorème de Cauchy linéaire, on connaît la forme des solutions $f \in E$ avec

$$N_2(f) = 0 \iff f'' + 2f' + f = 0 \iff f \in \text{Vect}(t \mapsto e^{-t}, t \mapsto te^{-t})$$

Les conditions initiales permettent d'en déduire $f = 0$.

Par inégalité triangulaire, on obtient

$$\forall f \in E \quad N_2(f) \leq 2N_1(f)$$

Soit $f \in E$ et $g = f'' + 2f' + f$. Posant $h = f' + f$, on trouve $g = h' + h$. Par variation de la constante, on obtient

$$\forall t \in [0; 1] \quad h(t) = e^{-t} \int_0^t g(s) e^s ds \quad \text{et} \quad f(t) = e^{-t} \int_0^t e^s h(s) ds$$

Par inégalité triangulaire, on trouve

$$\|h\|_\infty \leq \|g\|_\infty \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty \leq \|h\|_\infty$$

d'où

$$\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty = N_2(f)$$

Puis

$$\|f'\|_\infty = \|h - f\|_\infty \leq \|h\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 2N_2(f)$$

et

$$\|f''\|_\infty = \|g - 2h + f\|_\infty \leq \|g\|_\infty + 2\|h\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 4N_2(f)$$

Ainsi

$$\forall f \in E \quad N_1(f) \leq 7N_2(f)$$

On conclut

Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

Variante : Soit $f \in E$ et notons $g = f'' + 2f' + f$. On peut considérer cette égalité comme une équation différentielle et chercher à exprimer f en fonction de g . Avec l'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$, on trouve le système fondamental de solutions de l'équation homogène associée, à savoir (φ, ψ) avec $\varphi : t \mapsto e^t$ et $\psi : t \mapsto te^t$. Avec $\lambda, \mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables, on applique la méthode de variation de la constante sur $\lambda\varphi + \mu\psi$ en résolvant pour t réel

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} \iff e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} t+1 & -t \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t \in [0; 1] \quad \lambda(t) = \alpha - \int_0^t se^{-s}g(s) ds \quad \text{et} \quad \mu(t) = \beta + \int_0^t e^{-s}g(s) ds$$

et par suite $\forall t \in [0; 1] \quad f(t) = \alpha e^t + \beta te^t + \int_0^t (t-s)e^{t-s}g(s) ds$

Puis, avec $f = \lambda\varphi + \mu\psi$ et $f' = \underbrace{\lambda'\varphi + \mu'\psi}_{=0} + \lambda\varphi' + \mu\psi'$, on trouve

$$f(0) = f'(0) = 0 \iff \alpha = \beta = 0$$

Ainsi

$$f = \lambda\varphi + \mu\psi \quad f' = \lambda\varphi' + \mu\psi' \quad f'' = g + \lambda\varphi'' + \mu\psi''$$

avec $\forall t \in [0; 1] \quad \lambda(t) = - \int_0^t s e^{-s} g(s) \, ds \quad \text{et} \quad \mu(t) = \int_0^t e^{-s} g(s) \, ds$

Il existe des constantes $a, b > 0$ tels que $\|\lambda\|_\infty \leq a\|g\|_\infty$ et $\|\mu\|_\infty \leq b\|g\|_\infty$

d'où $\|f\|_\infty \leq (a\|\varphi\|_\infty + b\|\psi\|_\infty)\|g\|_\infty \quad \|f'\|_\infty \leq (a\|\varphi'\|_\infty + b\|\psi'\|_\infty)\|g\|_\infty \quad \dots$

Ainsi, il existe une constante $C > 0$ tel que $N_1(f) \leq C\|g\|_\infty = CN_2(f)$. On conclut comme précédemment.

Exercice 3 (**)

Soient N_1, N_2 deux normes sur E un $\mathbb{K}$ -ev.

1. On suppose que les boules unités fermées pour les deux normes sont égales. Montrer $N_1 = N_2$.
2. Montrer que le résultat vaut encore s'il s'agit des boules unités ouvertes.

Corrigé : 1. On note B_{f,N_1} et B_{f,N_2} les boules unités fermées respectivement pour les normes N_1 et N_2 . Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. Comme on a en particulier $B_{f,N_1} \subset B_{f,N_2}$, il s'ensuit

$$N_2\left(\frac{x}{N_1(x)}\right) \leq 1$$

d'où $N_2(x) \leq N_1(x)$

Par symétrie des rôles, l'autre inégalité s'en déduit et l'égalité a trivialement lieu pour $x = 0_E$ d'où

$$\boxed{N_1 = N_2}$$

2. On note B_{N_1} et B_{N_2} les boules unités ouvertes respectivement pour les normes N_1 et N_2 . Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$ et n entier non nul. Comme on a en particulier $B_{N_1} \subset B_{N_2}$, il s'ensuit

$$N_2\left(\frac{x}{N_1(x) + 1/n}\right) < 1$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad N_2(x) < N_1(x) + \frac{1}{n}$

Par passage à la limite, on en déduit l'inégalité large $N_2(x) \leq N_1(x)$ et on conclut donc comme précédemment que

$$\boxed{N_1 = N_2}$$

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev et $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant l'homogénéité et la séparation. Montrer que N est une norme si et seulement si l'ensemble

$$B = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\}$$

est une partie convexe de E .

Corrigé : Supposons N norme. Soit $(x, y) \in B^2$ et $\lambda \in [0; 1]$. Par inégalité triangulaire, on a

$$N(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda N(x) + (1 - \lambda)N(y) \leq 1$$

d'où la convexité de B . Réciproquement, supposons B convexe. Soit $(x, y) \in E^2$. Supposons x et y non nuls. Par convexité de B , on a

$$N\left(\frac{N(x)}{N(x)+N(y)}\frac{x}{N(x)} + \frac{N(y)}{N(x)+N(y)}\frac{y}{N(y)}\right) \leq 1$$

d'où $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Ainsi $\boxed{N \text{ norme} \iff B \text{ convexe}}$

Exercice 5 (****)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ et $g \in E$. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)g(x)|$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N soit une norme.
2. Si pour tout $x \in [0;1]$, $g(x) \neq 0$, montrer que N et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.
3. Démontrer la réciproque de la question précédente.

Corrigé : 1. Supposons qu'il existe $]\alpha; \beta[\subset g^{-1}(\{0\})$. Il suffit de prendre $f \in E$ affine par morceaux, non nulle sur $]\alpha; \beta[$ pour avoir $N(f) = 0$ ce qui contredit la séparation. Supposons qu'il n'existe aucun intervalle ouvert dans $g^{-1}(\{0\})$. Soit $f \in E \setminus \{0_E\}$. Il existe $x_0 \in [0;1]$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Par continuité de f , il existe $\varepsilon > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $V = [0;1] \cap]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$. Ainsi, on peut trouver un intervalle ouvert $J \subset V$ et comme $g|_J \neq 0$, alors $fg|_J \neq 0$ et d'où $N(f) > 0$. On conclut

$\boxed{\text{L'application } N \text{ est une norme si et seulement si } g^{-1}(\{0\}) \text{ ne contient aucun intervalle ouvert.}}$

2. Soit $f \in E$. On a clairement $N(f) \leq \|f\|_\infty \times \|g\|_\infty$. Puis, comme $|fg| \in E$, il existe $x_0 \in [0;1]$ tel que $N(f) = |fg|(x_0) \leq |g(x_0)| \times \|f\|_\infty$. Ainsi

$\boxed{\text{Les normes } N \text{ et } \|\cdot\|_\infty \text{ sont équivalentes.}}$

3. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x_0 \in [0;1]$ tel que $g(x_0) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par continuité de g , on a

$$\exists \eta_n > 0 \quad \forall x \in [0;1] \quad |x - x_0| \leq \eta_n \implies |g(x)| \leq \frac{1}{n}$$

On définit f_n affine par morceaux avec $f(x_0) = 1$ et $f(x) = 0$ pour $x \in [0;1]$ tel que $|x - x_0| \geq \frac{\eta_n}{2}$. Par construction, on a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N(f_n) \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi

$\boxed{N \text{ et } \|\cdot\|_\infty \text{ sont équivalentes si et seulement si } g^{-1}(\{0\}) = \emptyset.}$

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn. Montrer que deux boules ouvertes sont égales si et seulement elles ont même rayon et même centre.

Corrigé : Pour A partie bornée non vide de E , on définit le *diamètre* de A par

$$\delta(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} \|x - y\|$$

On vérifie sans difficulté que cette quantité est bien définie. Soit $a \in E$ et $r > 0$. Montrons l'égalité $\delta(B(a,r)) = 2r$. Pour $(x,y) \in B(a,r)^2$, il vient par inégalité triangulaire

$$\|x - y\| \leq \|x - a\| + \|a - y\| \leq 2r$$

Puis, soit $x \in B(a, r)$ et $x \neq a$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = a + r \frac{n-1}{n} \frac{x-a}{\|x-a\|} \quad \text{et} \quad v_n = a - r \frac{n-1}{n} \frac{x-a}{\|x-a\|}$$

Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont à valeurs dans $B(a, r)$ et on a

$$\|u_n - v_n\| = 2r \frac{n-1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2r$$

On en déduit

$$\delta(B(a, r)) = 2r$$

Par conséquent, deux boules ouvertes égales ont même diamètre et donc même rayon. Considérons deux boules $B(a, r)$ et $B(b, r)$ avec $a \neq b$. Si $\|b - a\| \geq r$, alors $b \notin B(a, r)$. Si $\|b - a\| < r$, alors, posant $u = a + \frac{b-a}{\|b-a\|}r$, on a $u \notin B(a, r)$ et $\|u - b\| = r - \|a - b\| < r$ d'où $u \in B(b, r)$.

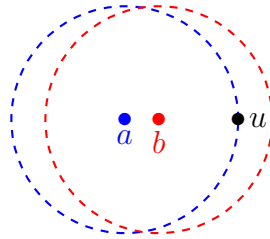


FIGURE 1 – Boules de même rayon de centres distincts

Dans tous les cas, on a donc $B(a, r) \neq B(b, r)$ si $a \neq b$. On conclut

Deux boules ouvertes sont égales si et seulement si elles ont même rayon et même centre.

Exercice 7 (***)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose

$$\forall P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in E \quad N_1(P) = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n} \quad \text{et} \quad N_2(P) = \int_0^1 |P(t)| \, dt$$

Justifier que N_1 et N_2 sont des normes sur E puis exhiber une suite convergente pour chaque norme mais avec des limites distinctes.

Corrigé : L'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont immédiates pour N_1 et N_2 . Soit $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in E$. Si $N_1(P) = 0$, comme une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chacun des termes de la somme est nulle, il vient $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ et par suite $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 = 0$ ce qui prouve $P = 0_E$. Si $N_2(P) = 0$, la fonction $t \mapsto |P(t)|$ étant continue positive sur $[0; 1]$, il vient par séparation de l'intégrale $P(t) = 0$ pour tout $t \in [0; 1]$ ce qui prouve que le polynôme P admet une infinité de racines et est donc le polynôme nul. Ainsi

Les applications N_1 et N_2 sont des normes sur E .

Pour n entier, on trouve

$$N_1(X^n - 1) = |1 - 1| + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad N_2(X^n) = \frac{1}{n+1}$$

Autrement dit

$$X^n \xrightarrow{N_1} 1 \quad \text{et} \quad X^n \xrightarrow{N_2} 0$$

Commentaire : Il s'agit bien évidemment de normes non équivalentes puisqu'on sait que deux normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes. L'exercice fournit donc un contre-exemple explicite d'une suite qui admet des limites distinctes pour le choix de deux normes non équivalentes.