Feuille d'exercices n°25

Exercice 1 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn. Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|x\| + \|y\| \leqslant \|x+y\| + \|x-y\|$$

Exercice 2 (**)

Soit E evn et $(x,y,z) \in \mathrm{E}^3$ tel que $x+y+z=0$. Montrer que

$$\|x-y\| + \|y-z\| + \|z-x\| \geqslant \frac{3}{2}\left(\|x\| + \|y\| + \|z\|\right)$$

Exercice 3 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{K})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(f_1, \ldots, f_n) \in \mathrm{E}^n$ pour que l'application N définie par

$$\mathrm{N} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \|\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\|_\infty$$

soit une norme.

Exercice 4 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $a_0, \ldots, a_n$ des réels et $\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}(\mathrm{P}) = \sum_{k=0}^{n} |\mathrm{P}(a_k)|$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que l'application N soit une norme.

Exercice 5 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On pose

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}_1(\mathrm{P}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\mathrm{P}^{(n)}(0)\right| \qquad \mathrm{N}_2(\mathrm{P}) = \operatorname*{Sup}_{t \in [\,0\,;1\,]} |\mathrm{P}(t)| \qquad \mathrm{N}_3(\mathrm{P}) = \operatorname*{Sup}_{t \in [\,1\,;2\,]} |\mathrm{P}(t)|$$

Montrer que N_1, N_2, N_3 sont des normes puis étudier leur équivalence.

Exercice 6 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$. On pose

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

Montrer que N est une norme puis étudier l'équivalence de N et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 7 (**)

On pose

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \forall (n,\theta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{R}(\theta)^k$$

Étudier la convergence de la suite $(\mathrm{S}_n(\theta))_{n\geqslant 1}$.

Exercice 8 (*)

Soit $\mathrm{E} = \{f \in \mathscr{C}^2([\,0\,;\pi\,]\,,\mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$. On pose

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}(f) = \|f + f''\|_\infty$$

Montrer que N est une norme puis étudier l'équivalence de N et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 9 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$. On définit l'application N sur E par

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t}$$

Montrer que N est une norme puis la comparer à $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 10 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Déterminer si l'une des deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ vérifie l'inégalité dite de *norme d'algèbre*, à savoir

$$\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$$

2. On suppose E muni d'une norme $\|\cdot\|$. Montrer qu'il existe une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que

$$\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\| \leqslant \mathrm{C}\|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$$