

Feuille d'exercices n°26

Exercice 1 (**)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 2$. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur E invariante par conjugaison, c'est-à-dire telle que

$$\forall (A, P) \in E \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \|A\| = \|P^{-1}AP\|$$

Exercice 2 (**)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit la *norme de Frobenius* par $\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^T A)}$ pour $A \in E$. Montrer que $\|\cdot\|_F$ est une norme et qu'elle vérifie

$$\forall (A, B) \in E^2 \quad \|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$$

Exercice 3 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev normé et N_1, N_2 des normes sur E . Montrer que les normes N_1, N_2 sont équivalentes si et seulement si elles définissent les mêmes parties bornées sur E .

Exercice 4 (**)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, on note

$$N(P) = \|P' - P\|_{\infty, [0;1]} \quad \text{et} \quad \|P\|_{\infty} = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

1. Vérifier que ce sont des normes.
2. Comparer ces normes.

Exercice 5 (***)

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. On pose

$$\forall f \in E \quad N_1(f) = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty} \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f + f'\|_{\infty}$$

Montrer que N_1 et N_2 sont des normes puis les comparer entre elles et ensuite avec $\|\cdot\|_{\infty}$.

Exercice 6 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$. Montrer

$$E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$$

On pourra considérer $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k$ avec n entier non nul.

Exercice 7 (**)

Soit A partie non vide de $\mathbb{R}$. On définit N_A sur $\mathbb{K}[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad N_A(P) = \sup_{t \in A} |P(t)|$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que N_A soit une norme.

Exercice 8 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev normé et F un sev de E . Montrer

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad d(\lambda x, F) = |\lambda| d(x, F)$$

Exercice 9 (***)

Soient a, b, c et d des réels avec $a < b$ et $c < d$. On pose

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad N_1(P) = \sup_{t \in [a; b]} |P(t)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{t \in [c; d]} |P(t)|$$

Comparer les normes N_1 et N_2 .

Exercice 10 (***)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$ avec $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, on munit E de $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|P\|_\infty = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$.

On dit qu'une suite $(P_n)_n$ est de *Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (p, n) \in \mathbb{N}^2 \quad n \geq N \implies \|P_{n+p} - P_n\| \leq \varepsilon$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{X^k}{k}$

1. Montrer que $(P_n)_n$ est de Cauchy.
2. Montrer que $(P_n)_n$ ne converge pas.

Exercice 11 (****)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A \in E$ avec $\text{Sp}(A) \subset D(0, 1)$. Étudier la convergence de la suite $(A^p)_p$.