

## Feuille d'exercices n°27

Dans ce qui suit,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### Exercice 1 (\*\*\*)

On note  $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$  l'ensemble des suites  $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  de carré sommable, i.e. telles que  $\sum |u_n|^2$  converge. Montrer que  $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -ev normé par

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$$

**Indications :** Établir  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

pour montrer que  $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -ev. Pour l'inégalité triangulaire, se ramener à une configuration dans  $\mathbb{K}^{N+1}$  avec  $N$  entier muni de la norme deux en posant pour  $(u, v) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})^2$ , les suites  $u^N = (u_n \delta_{n \leq N})_n$  et  $v^N = (v_n \delta_{n \leq N})_n$ .

### Exercice 2 (\*\*\*)

Soit  $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0; 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$  muni de

$$\forall f \in E \quad N_1(f) = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty} + \|f''\|_{\infty} \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f'' + 2f' + f\|_{\infty}$$

Justifier que  $N_1$  et  $N_2$  sont des normes puis les comparer.

**Indications :** Pour étudier la finesse de  $N_2$  par rapport à  $N_1$ , pour  $f \in E$ , poser  $h = f' + f$  et  $g = h' + h$  et procéder par variation de la constante pour trouver une expression de  $f$  fonction de  $h$  et une expression de  $h$  fonction de  $g$ . Conclure avec diverses inégalités triangulaires.

### Exercice 3 (\*\*)

Soient  $N_1, N_2$  deux normes sur  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev.

1. On suppose que les boules unités fermées pour les deux normes sont égales. Montrer  $N_1 = N_2$ .
2. Montrer que le résultat vaut encore s'il s'agit des boules unités ouvertes.

**Indications :** 1. En considérant un vecteur non nul normalisé (multiplié par l'inverse de sa norme), établir  $N_2 \leq N_1$ .

2. Adapter l'idée de la normalisation pour être dans la boule ouverte.

### Exercice 4 (\*\*\*)

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev et  $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  vérifiant l'homogénéité et la séparation. Montrer que  $N$  est une norme si et seulement si l'ensemble

$$B = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\}$$

est une partie convexe de  $E$ .

**Indications :** Si  $N$  convexe, considérer  $x$  et  $y$  non nuls puis utiliser une combinaison convexe de  $\frac{x}{N(x)}$  et  $\frac{y}{N(y)}$ .

### Exercice 5 (\*\*\*\*)

Soit  $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$  et  $g \in E$ . Pour  $f \in E$ , on pose

$$N(f) = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)g(x)|$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $g$  pour que  $N$  soit une norme.
2. Si pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $g(x) \neq 0$ , montrer que  $N$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont équivalentes.
3. Démontrer la réciproque de la question précédente.

**Indications :** 1. Supposer qu'il existe  $]\alpha; \beta[ \subset g^{-1}(\{0\})$  et obtenir une contradiction. Puis considérer l'hypothèse contraire.

3. Si  $g(x_0) = 0$  avec  $x_0 \in [0; 1]$ , il existe  $\eta_n > 0$  tel que  $g(x) \leq \frac{1}{n}$  pour  $|x - x_0| \leq \eta_n$ .

Construire alors  $f_n \in E$  telle que  $\|f_n\|_\infty = 1$  et  $N(f_n) \leq \frac{1}{n}$ .

### Exercice 6 (\*\*\*)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -evn. Montrer que deux boules ouvertes sont égales si et seulement elles ont même rayon et même centre.

**Indications :** Pour  $A$  partie bornée non vide de  $E$ , considérer le *diamètre* de  $A$  par

$$\delta(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} \|x - y\|$$

Déterminer ensuite  $\delta(B(a, r))$  avec  $a \in E$  et  $r > 0$ . En déduire que deux boules égales sont de même rayon puis conclure en discutant des positions des centres.

### Exercice 7 (\*\*\*)

Soit  $E = \mathbb{R}[X]$ . On pose

$$\forall P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in E \quad N_1(P) = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n} \quad \text{et} \quad N_2(P) = \int_0^1 |P(t)| \, dt$$

Justifier que  $N_1$  et  $N_2$  sont des normes sur  $E$  puis exhiber une suite convergente pour chaque norme mais avec des limites distinctes.

**Indications :** Considérer la suite  $(X^n)_n$  et étudier  $N_1(X^n - Q)$  avec  $Q \in E$  judicieusement choisi.