

Corrigé du devoir en temps libre n°05

Problème I

1. L'application φ est linéaire par linéarité de la dérivation et bilinéarité du produit. On a

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \varphi(X^k) = (k - n)X^{k+1} - kX^k$$

et en particulier $\varphi(X^n) = -nX^n$. L'application φ envoie donc une base de E dans E et par caractérisation d'une application linéaire sur une base, on conclut

$$\varphi \in \mathcal{L}(E)$$

Et on a

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -n & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -(n-1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -n \end{pmatrix}$$

2. Notant $\mathcal{C} = (X^k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ la base canonique de E , la matrice $\text{mat}_{\mathcal{C}}\varphi$ est triangulaire inférieure donc son spectre se lit sur la diagonale avec $\text{Sp}(\varphi) = \{-k, k \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$. L'endomorphisme admet $n+1$ valeurs propres distinctes dans un espace de dimension $n+1$, d'où par condition suffisante

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable.}}$$

Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et $P \in E$. On a

$$\varphi(P) = -kP \iff X(X-1)P' - (nX-k)P = 0$$

On considère alors l'équation différentielle sur $I =]1; +\infty[$ donnée par

$$x(x-1)y' - (nx-k)y = 0$$

On a

$$\int^x \frac{nt-k}{t(t-1)} dt = \int^x \left(\frac{k}{t} + \frac{n-k}{t-1} \right) dt = \ln [x^k(x-1)^{n-k}]$$

Les solutions sont décrites par $\text{Vect}(x \mapsto x^k(x-1)^{n-k})$ qui sont polynomiales et par conséquent

$$\boxed{\text{Pour } k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \text{ on a } E_k(\varphi) = \text{Vect}(X^k(X-1)^{n-k}) \text{ pour } k \in \llbracket 0; n \rrbracket.}$$

Problème II

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme la matrice A est trigonalisable, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle qu'on ait l'écriture par blocs

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda I_{m_\lambda} + T_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(A)}$$

avec T_λ triangulaire supérieure stricte pour $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Posant

$$B = P \text{diag}(\lambda I_{m_\lambda})_{\lambda \in \text{Sp}(A)} P^{-1} \quad \text{et} \quad N = P \text{diag}(T_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(A)} P^{-1}$$

on a B semblable à une matrice diagonale, N semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte donc nilpotente et un produit par blocs montre que $BN = NB$. On conclut

La décomposition de Dunford existe dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Avec successivement $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ puis $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$, il vient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & 1 & -1 \\ -2 & X & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & X & -1 \\ 0 & 1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & X & 0 \\ 0 & 1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)^2(X-1)$$

On trouve

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (A - 2I_3)(A - I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $(A - I_3)X = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = y\varepsilon_3 \quad \text{avec} \quad \varepsilon_3 = (0, 1, 1)$

En considérant la dernière colonne (la plus simple) de $(A - 2I_3)(A - I_3)$ qui est non nulle, on choisit la dernière colonne de $A - I_3$ puis celle de $(A - 2I_3)(A - I_3)$ que l'on complète par une base de $E_1(A)$ pour former la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve $\det(P) = -1 \neq 0$. C'est donc une matrice de passage vers la forme réduite de Jordan avec

$$P^{-1}AP = D + T \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec $B = PDP^{-1}$ et $N = PTP^{-1}$, on conclut

La décomposition de Dunford de A est donnée par $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Problème III

1. L'application Φ est linéaire par bilinéarité du produit et clairement à valeurs dans E d'où

$$\Phi \in \mathcal{L}(E)$$

2. On pose $\forall M \in E \quad f(M) = AM \quad g(M) = MA$

Pour les mêmes raisons qu'avec Φ , les applications f et g sont des endomorphismes de E . On remarque

$$\forall M \in E \quad f \circ g(M) = AMA = g \circ f(M)$$

autrement dit les endomorphismes f et g commutent. D'après le binôme de Newton, on a

$$\Phi^{2n} = (f + g)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} f^k \circ g^{2n-k}$$

d'où $\forall M \in E \quad \Phi^{2n}(M) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} A^k M A^{2n-k}$

On a $A^n = 0$ puisque l'indice de nilpotence est inférieur à $n = \dim \mathbb{K}^n$. Si $k \geq 2n$, alors $A^k = 0$ et sinon, on a $2n - k > 2n - n = n$ et $A^{2n-k} = 0$. Par conséquent, on a $\Phi^{2n} = 0$ et on conclut

Si A est nilpotente, l'endomorphisme Φ l'est également.

3.(a) On a $A = P \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k E_{k,k} \right) P^{-1}$ d'où pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$

$$\begin{aligned} \Phi(M_{i,j}) &= P \left[\sum_{k=1}^n \lambda_k (E_{k,k} E_{i,j} + E_{i,j} E_{k,k}) \right] P^{-1} \\ &= P \left[\sum_{k=1}^n \lambda_k (\delta_{i,k} E_{k,j} + \delta_{j,k} E_{i,k}) \right] P^{-1} = P [\lambda_i E_{i,j} + \lambda_j E_{i,j}] P^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad \Phi(M_{i,j}) = (\lambda_i + \lambda_j) M_{i,j}$$

3.(b) Soit $(\alpha_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ des scalaires telles que $\sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{i,j} M_{i,j} = 0_E$. Par conséquent, on a

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{i,j} M_{i,j} = P \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{i,j} E_{i,j} \right) P^{-1} = 0_E$$

ce qui prouve que la matrice $\sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{i,j} E_{i,j} = 0$ est semblable à la matrice nulle donc nulle et la nullité des $\alpha_{i,j}$ s'ensuit puisque la famille $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la base canonique de E . Ainsi, la famille $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est libre de cardinal égal à $\dim E$ et c'est une famille de vecteurs propres ce qui permet de conclure que

L'endomorphisme Φ est diagonalisable et la famille $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de diagonalisation de E .

Problème IV (bonus)

1. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, le polynôme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et admet donc au moins une racine. Comme les racines de χ_A sont exactement les valeurs propres de A , on conclut

Il existe $\mu \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tels que $AX = \mu X$.

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il n'y a rien à faire. Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $(\alpha_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une famille de complexes telle que $\sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{i,j} M_{i,j} = 0$. Considérant partie réelle et imaginaire, les matrices $M_{i,j}$ étant dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \operatorname{Re}(\alpha_{i,j}) M_{i,j} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i,j \leq n} \operatorname{Im}(\alpha_{i,j}) M_{i,j} = 0$$

d'où, par liberté de la famille $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad \operatorname{Re}(\alpha_{i,j}) = \operatorname{Im}(\alpha_{i,j}) = 0$$

ce qui prouve la nullité des $\alpha_{i,j}$ et donc la liberté de $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ en tant que famille de vecteurs du $\mathbb{C}$ -ev $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme elle est de cardinal égal à $n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on conclut

La famille $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. On trouve $\bar{X}^\top X = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$ et comme au moins une des composantes de X est non nulle, son module est strictement positif et avec un calcul direct, on conclut

$$\boxed{\bar{X}^\top X > 0 \quad \text{et} \quad MX = Y}$$

4. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Avec $M = \frac{1}{\bar{X}^\top X} Y \bar{X}^\top$, on a $MX = Y$ ce qui prouve que l'application $h : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), M \mapsto MX$ est surjective. Par conséquent, elle envoie une famille génératrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et on conclut

$$\boxed{\text{La famille } (M_{i,j}X)_{1 \leq i,j \leq n} \text{ est génératrice de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}).}$$

5. Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$. On a

$$\Phi(M_{i,j}) = \lambda_{i,j} M_{i,j} \iff AM_{i,j} + M_{i,j}A = \lambda_{i,j} M_{i,j}$$

d'où

$$AM_{i,j}X + M_{i,j} \underbrace{AX}_{=\mu X} = \lambda_{i,j} M_{i,j}X$$

Ainsi

$$\boxed{\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad AM_{i,j}X = (\lambda_{i,j} - \mu) M_{i,j}X}$$

6. D'après le théorème de la base extraite, on peut extraire de la famille $(M_{i,j}X)_{1 \leq i,j \leq n}$ génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une base de cet espace et le résultat de la question précédente prouve alors qu'il s'agit d'une base de diagonalisation et on conclut

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

7. La trace de A est la somme de n termes issus de la famille $(\lambda_{i,j} - \mu)_{1 \leq i,j \leq n}$ autrement dit, après l'extraction idoine, on a

$$\text{Tr}(A) = \sum_{k=1}^n (\lambda_{i_k, j_k} - \mu)$$

d'où

$$\mu = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_{i_k, j_k} - \text{Tr}(A) \right) \in \mathbb{K}$$

Ainsi, dans $\mathbb{K}$, le scalaire μ est racine de χ_A et l'on peut donc choisir un vecteur propre $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ (on peut aussi le construire à partir de la colonne exhibée en question 1 : si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il n'y a rien à faire et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère partie réelle ou imaginaire de X qui ne peuvent être simultanément nulles). La base de diagonalisation de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ extraite à la question 6 est donc une famille de vecteurs de propres de A dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ libre et de cardinal égal à $n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On conclut

$$\boxed{\text{Si l'endomorphisme } \Phi \text{ est diagonalisable, alors la matrice } A \text{ l'est aussi.}}$$

Remarque : On a utilisé de manière essentielle la transition par le corps $\mathbb{C}$. Des alternatives existent qui évitent ce procédé.