ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°19

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\sigma : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, (u_n)_n \mapsto (u_{n+1})_n$. Déterminer les valeurs propres de σ.

Corrigé : Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on trouve $\mathrm{Ker}\,(\sigma - \lambda\,\mathrm{id}\,) = \mathrm{Vect}\,((\lambda^n)_n)$. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble des valeurs propres de } \sigma \text{ est } \mathbb{K} \text{ tout entier.}}$$

Remarque : En particulier, pour $\lambda = 0$, on a $\mathrm{Ker}\,\sigma = \mathrm{Vect}\,((\delta_{0,n})_n)$.

Exercice 2 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, f \mapsto \left(x \mapsto \displaystyle\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t\right)$. Déterminer les valeurs propres de T.

Corrigé : Soit $f \in \mathrm{E}$. On a $\mathrm{T}(f) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Par dérivation, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{T}(f)'(x) = x f(x)$$

Ainsi
$$\mathrm{T}(f) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad x f(x) = 0$$

On en déduit f nulle sur $\mathbb{R}^*$ et donc $f = 0$ par continuité ce qui prouve que 0 n'est pas valeur propre de T. Soit $\lambda \neq 0$. On a

$$\mathrm{T}(f) = \lambda f \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad x f(x) = \lambda f'(x)$$

On en déduit $f \in \mathrm{Vect}\,(x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2\lambda}})$ puis $f = \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{T}(f)$ d'où $f(0) = 0$ et par conséquent $f = 0$. On conclut

$$\boxed{\text{L'endomorphisme T n'admet pas de valeurs propres.}}$$

Exercice 3 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$ et φ définie sur E par $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M} + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$ pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Déterminer les éléments propres de φ.

Corrigé : L'application φ est à valeurs dans E et linéaire par linéarité de la trace et du produit d'où $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Soit λ réel et $\mathrm{M} \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$. On a

$$\varphi(\mathrm{M}) = \lambda \mathrm{M} \iff (\lambda - 1)\mathrm{M} = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$$

Par suite
$$\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M} \iff \mathrm{M} \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr}$$

ce qui prouve que $1 \in \mathrm{Sp}\,(\varphi)$ et $\mathrm{E}_1(\varphi) = \mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr}$, hyperplan de E. Pour $\lambda \neq 1$, on a $\mathrm{M} = \dfrac{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})}{\lambda - 1}\mathrm{I}_n \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n)$ puis $\varphi(\mathrm{I}_n) = (n+1)\mathrm{I}_n$. On en déduit que $n + 1 \in \mathrm{Sp}\,(\varphi)$ avec $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n) \subset \mathrm{E}_{n+1}(\varphi)$ et on sait aussi $\mathrm{E}_{n+1}(\varphi) \subset \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n)$ car $n + 1 \neq 1$ d'où l'égalité $\mathrm{E}_{n+1}(\varphi) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n)$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(\varphi) = \{1, n+1\} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_1(\varphi) = \mathrm{Ker\ Tr} \qquad \mathrm{E}_{n+1}(\varphi) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n)}$$

Remarque : On a $\dim \mathrm{E}_1(\varphi) + \dim \mathrm{E}_{n+1}(\varphi) = \dim \mathrm{E}$ ce qui prouve le caractère diagonalisable de φ.

Variante : Après le calcul de $\varphi(\mathrm{I}_n) = (n+1)\mathrm{I}_n$, on peut aussi écrire

$$\dim \mathrm{E} \geqslant \dim \mathrm{E}_1(\varphi) \oplus \mathrm{E}_{n+1}(\varphi) = \dim \mathrm{E}_1(\varphi) + \dim \mathrm{E}_{n+1}(\varphi) \geqslant n^2 - 1 + 1 = \dim \mathrm{E}$$

ce qui prouve l'égalité des dimensions.

Exercice 4 (**)

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et u, v dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v admettent un vecteur propre commun.

Corrigé : Soit λ valeur propre de u (existe car χ_u scindé). Les endomorphismes $u - \lambda\,\mathrm{id}$ et v commutent d'où $\mathrm{E}_\lambda(u)$ stable par v et notant v_λ l'endomorphisme induit, celui-ci admet une valeur propre et donc un vecteur propre associé (χ_{v_λ} est scindé). Un tel vecteur est vecteur propre de v_λ donc de v et dans $\mathrm{E}_\lambda(u)$ donc vecteur propre de u. Ainsi

$$\boxed{\text{Deux endomorphismes d'un } \mathbb{C}\text{-ev qui commutent ont un vecteur propre commun.}}$$

Exercice 5 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f, g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.
2. Si E est de dimension finie, établir

$$\mathrm{Sp}\,(f \circ g) = \mathrm{Sp}\,(g \circ f)$$

Corrigé : 1. Soit λ valeur propre non nulle de $f \circ g$ et $x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0\}$ tel que $f \circ g(x) = \lambda x$. En particulier, on a $g(x) \neq 0_\mathrm{E}$ puisque $f(g(x)) = \lambda x \neq 0_\mathrm{E}$. Par suite

$$g \circ f(g(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x) \quad \text{avec} \quad g(x) \neq 0_\mathrm{E}$$

ce qui prouve $\qquad \lambda$ valeur propre non nulle de $g \circ f$

Par symétrie des rôles, on conclut

$$\boxed{\text{Les endomorphismes } f \circ g \text{ et } g \circ f \text{ ont les mêmes valeurs propres non nulles.}}$$

2. On rappelle que pour $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E de dimension finie, on a

$$u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \det u \neq 0$$

On sait $\det(f \circ g) = \det(g \circ f)$ d'où

$$0 \in \mathrm{Sp}\,(f \circ g) \iff 0 \in \mathrm{Sp}\,(g \circ f)$$

Ainsi $\qquad \boxed{\mathrm{Sp}\,(f \circ g) = \mathrm{Sp}\,(g \circ f)}$

Exercice 6 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, P, Q dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ avec $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} = 1$ et $(\mathrm{PQ})(f) = 0$. Montrer

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\ \mathrm{P}(f) \oplus \mathrm{Im}\ \mathrm{P}(f)$$

Corrigé : Avec le lemme des noyaux, on a $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\ \mathrm{P}(f) \oplus \mathrm{Ker}\ \mathrm{Q}(f)$. Montrons $\mathrm{Ker}\ \mathrm{Q}(f) = \mathrm{Im}\ \mathrm{P}(f)$. On a $\mathrm{Q}(f) \circ \mathrm{P}(f) = 0$ d'où $\mathrm{Im}\ \mathrm{P}(f) \subset \mathrm{Ker}\ \mathrm{P}(f)$. Avec la relation de Bézout, il existe A, B dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{AP} + \mathrm{BQ} = 1$. Pour $x \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{Q}(f)$, on a

$$x = \mathrm{P}(f) \circ \mathrm{A}(f)(x) + \mathrm{B}(f) \circ \mathrm{Q}(f)(x) = \mathrm{P}(f) \circ \mathrm{A}(f)(x) \in \mathrm{Im}\ \mathrm{P}(f)$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\ \mathrm{P}(f) \oplus \mathrm{Im}\ \mathrm{P}(f)}$

Exercice 7 (*)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = 1$. Déterminer χ_{A}.

Corrigé : On a $\dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{A} = \dim \mathrm{E}_0(\mathrm{A}) = n - 1$ d'où $\mathrm{X}^{n-1} | \chi_{\mathrm{A}}$. Ainsi, il existe $\alpha \in \mathrm{K}$ tel que $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X} - \alpha) = \mathrm{X}^n - \alpha \mathrm{X}^{n-1}$. Or, on sait que

$$\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^n - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\mathrm{X}^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(\mathrm{A})$$

Par identification, on conclut

$$\boxed{\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X} - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}))}$$

Variante : Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A. En complétant une base de Ker u en base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^n$, on trouve la matrice par blocs $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{C} \\ \hline 0 & \alpha \end{array}\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\mathrm{C} \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$. En particulier, on a $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}\,(u) = \alpha$ et on trouve

$$\chi_{\mathrm{A}} = \chi_u = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X} - \alpha) = \mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X} - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}))$$

On peut aussi partir d'une base de Im u que l'on complète en base de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 8 (*)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Comparer χ_{A} avec $\chi_{\mathrm{A}^\mathrm{T}}$, π_{A} avec $\pi_{\mathrm{A}^\mathrm{T}}$.

Corrigé : On a

$$\chi_{\mathrm{A}} = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{A}) = \det{(\mathrm{XI}_n - \mathrm{A})^\mathrm{T}} = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{A}^\mathrm{T}) = \chi_{\mathrm{A}^\mathrm{T}}$$

Notons $\pi_{\mathrm{A}} = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k \mathrm{X}^k$. On a $\pi_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k \mathrm{A}^k = 0$. En transposant cette égalité, il vient $\pi_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}^\mathrm{T}) = 0$ d'où $\pi_{\mathrm{A}^\mathrm{T}} | \pi_{\mathrm{A}}$ et l'autre sens vient par symétrie des rôles. Les polynômes étant unitaires et associés, on conclut

$$\boxed{\chi_{\mathrm{A}} = \chi_{\mathrm{A}^\mathrm{T}} \quad \text{et} \quad \pi_{\mathrm{A}} = \pi_{\mathrm{A}^\mathrm{T}}}$$

Exercice 9 (**)

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) = \varnothing \iff \chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

Corrigé : D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, on peut écrire

$$\chi_{\mathrm{A}} = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} (\mathrm{X}-\lambda)^{m_\lambda(\mathrm{A})}$$

$$\begin{aligned}
\text{Puis } \chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\iff \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} (\mathrm{B}-\lambda \mathrm{I}_n)^{m_\lambda(\mathrm{A})} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\
&\iff \det\left(\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} (\mathrm{B}-\lambda \mathrm{I}_n)^{m_\lambda(\mathrm{A})}\right) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} ((-1)^n \chi_{\mathrm{B}}(\lambda))^{m_\lambda(\mathrm{A})} \neq 0 \\
\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\iff \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \qquad \lambda \notin \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})
\end{aligned}$$

D'où $$\boxed{\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) = \varnothing \iff \chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$$

Exercice 10 (**)

Calculer χ_{A} avec $\mathrm{A} = \big(a_{i,j}\big) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Corrigé : Avec successivement $\mathrm{C}_1 \leftarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{C}_i$ et $\mathrm{C}_k \leftarrow \mathrm{C}_k + \mathrm{C}_1$ pour $k \in [\![2\,; n]\!]$, on obtient

$$\chi_{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & \mathrm{X} \end{vmatrix} = (\mathrm{X}-n+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & \mathrm{X} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ 1 & \dots & -1 & \mathrm{X} \end{vmatrix} = (\mathrm{X}-n+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \mathrm{X}+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & -1 & \mathrm{X}+1 \end{vmatrix}$$

Ainsi $$\boxed{\chi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X}-n+1)(\mathrm{X}+1)^{n-1}}$$

Variante : Notant $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(u + \mathrm{id}\,)$ de rang 1 donc semblable à une matrice $\left(\begin{array}{c|c} \alpha & \mathrm{L} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ avec $\alpha = \mathrm{Tr}\,(u + \mathrm{id}\,) = n$ d'où $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}} u$ semblable à $\left(\begin{array}{c|c} n-1 & \mathrm{L} \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_{n-1} \end{array}\right)$. On retrouve le résultat précédent.

Exercice 11 (**)

Calculer χ_{A} avec $\mathrm{A} = \big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ ou } j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Corrigé : On a $$\chi_{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} \mathrm{X}-1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & \mathrm{X} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & \mathrm{X} \end{vmatrix}$$

Avec l'opération $\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \dfrac{1}{\mathrm{X}} \sum\limits_{i=2}^{n} \mathrm{L}_i$, il vient

$$\chi_{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} \mathrm{X}-1-\dfrac{n-1}{\mathrm{X}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & \mathrm{X} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & \mathrm{X} \end{vmatrix} = \left(\mathrm{X}-1-\frac{n-1}{\mathrm{X}}\right)\mathrm{X}^{n-1}$$

Ainsi $$\boxed{\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^{n-2}(\mathrm{X}^2-\mathrm{X}-n+1)}$$

Variantes : 1. Notant $\mathrm{P}_n = \chi_{\mathrm{A}}$, on obtient en développant sur la dernière colonne, on trouve

$$\mathrm{P}_n = \mathrm{XP}_{n-1} + (-1)^n \begin{vmatrix} -1 & \mathrm{X} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \mathrm{X} \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}_{n-1} = \mathrm{XP}_{n-1} - \mathrm{X}^{n-2}$$

en développant le déterminant d'ordre $n-1$ sur la dernière ligne. On peut ensuite calculer P_n pour de petites valeurs de n afin de conjecturer une forme générale puis l'établir par récurrence ou considérer la fraction rationnelle $\mathrm{R}_n = \dfrac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{X}^n}$ puisqu'on a

$$\mathrm{R}_n = \frac{\mathrm{P}_{n-1}}{\mathrm{X}^{n-1}} - \frac{1}{\mathrm{X}^2} = \mathrm{R}_{n-1} - \frac{1}{\mathrm{X}^2}$$

ce qui prouve que la suite $(\mathrm{R}_n)_n$ est arithmétique et on peut donc déterminer son terme général aisément.

2. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A. On pose $\varepsilon_1 = e_1$ et $\varepsilon_2 = \sum_{i=1}^{n} e_i$. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\operatorname{Im} u$. On a

$$\mathrm{AX} = 0 \iff x_1 = 0, \sum_{i=2}^{n} x_i = 0 \iff \mathrm{X} = \sum_{i=3}^{n} -x_i(e_3 - e_i)$$

On pose $\varepsilon_i = e_3 - e_i$ pour $i \in [\![3\,;\, n]\!]$ et $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Avec l'opération $\mathrm{C}_2 \leftarrow \sum_{i=2}^{n} \mathrm{C}_i$ sur la matrice

$$\mathrm{P} = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}} \mathscr{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on obtient une matrice constituée de n colonnes échelonnées non nulles ce qui prouve que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ pour laquelle on a

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{B} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $$\chi_{\mathrm{A}} = \chi_u = \chi_{\mathrm{B}} \mathrm{X}^{n-2} = (\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - n + 1)\mathrm{X}^{n-1}$$

Exercice 12 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$. Montrer que $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

Corrigé : On a $\det u \neq 0$ puis

$$\begin{aligned}
\chi_u(u) = 0 &\iff u^n - (\mathrm{Tr}\ u)u^{n-1} + \ldots + (-1)^n(\det u)\,\mathrm{id} = 0 \\
&\iff (-1)^{n-1}(\det u)^{-1}\left[u^n - (\mathrm{Tr}\ u)u^{n-1} + \ldots\right] = \mathrm{id} \\
\chi_u(u) = 0 &\iff u \circ (-1)^{n-1}(\det u)^{-1}\left[u^{n-1} - (\mathrm{Tr}\ u)u^{n-2} + \ldots\right] = \mathrm{id}
\end{aligned}$$

On conclut $$\boxed{u^{-1} \in \mathbb{K}[u]}$$

Variante : Soit $\Phi : \mathbb{K}[u] \to \mathbb{K}[u], v \mapsto v \circ u$. On a $\Phi \in \mathscr{L}(\mathbb{K}[u])$ et $\mathrm{Ker}\ \Phi = \{0\}$ car u inversible. L'application Φ est un endomorphisme injectif en dimension finie. C'est donc un automorphisme et par suite, il existe $v \in \mathbb{K}[u]$ tel que $\Phi(v) = \mathrm{id}$ ce qui prouve le résultat attendu. Notant $\mathscr{B} = (u^k)_{0 \leqslant k \leqslant d}$ avec $d = \deg \pi_u$, on peut remarquer que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\Phi$ est la matrice compagne du polynôme minimal de π_u.

Exercice 13 (*)

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Déterminer $\chi_{\mathrm{A}^{-1}}$ en fonction de χ_{A}.

Corrigé : On a $$\chi_{\mathrm{A}} = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{A}) = \det(-\mathrm{XA}(\mathrm{I}_n/\mathrm{X} - \mathrm{A}^{-1}))$$

Ainsi $$\boxed{\chi_{\mathrm{A}} = (-\mathrm{X})^n \det(\mathrm{A})\chi_{\mathrm{A}^{-1}}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)}$$

Exercice 14 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = 1$. Déterminer π_{A}.

Corrigé : On prouve successivement qu'il existe X, Y des colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulles telles que $\mathrm{A} = \mathrm{XY}^\top$ puis $\mathrm{A}^2 = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\mathrm{A}$. On en déduit $\pi_{\mathrm{A}} | \mathrm{X}(\mathrm{X} - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}))$. Si $\deg \pi_{\mathrm{A}} = 1$, alors A serait une matrice d'homothétie de rang 1. On exclut le cas $n = 1$ qui est trivial et on en déduit que $\mathrm{rg}\ \mathrm{A} \in \{0, n\}$ ce qui est impossible. On conclut

$$\boxed{\text{Pour } \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \text{ avec } n \geqslant 2 \text{ et } \mathrm{rg}\ \mathrm{A} = 1, \text{ on a } \pi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^2 - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\mathrm{X}.}$$

Exercice 15 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. L'endomorphisme $\mathrm{D} : f \mapsto f'$ admet-il un polynôme minimal ?

Corrigé : Notons $f_\lambda : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour λ réel. On a $\mathrm{D}(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$ pour tout λ réel donc tout réel est valeur propre de D. Si D admet un polynôme minimal, celui-ci admet donc une infinité de racines donc est le polynôme nul d'où

$$\boxed{\text{L'endomorphisme D n'admet pas de polynôme minimal.}}$$

Exercice 16 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ avec n entier. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, on pose $\varphi(\mathrm{P}) = (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}' - n\mathrm{P}$. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis calculer χ_φ.

Corrigé : L'application φ est linéaire par linéarité du produit et de la dérivation puis $\varphi(1) = -n$ et $\varphi(\mathrm{X}^k) = (k-n)\mathrm{X}^k - k\mathrm{X}^{k-1}$ pour $k \in [\![1\,; n]\!]$. Notant $\mathscr{C}$ la base canonique de E, on a

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{C}} \varphi = \begin{pmatrix} -n & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(n-1) & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi
$$\boxed{\chi_\varphi = \prod_{k=0}^{n} (\mathrm{X}+k)}$$