

## Feuille d'exercices n°20

Dans ce qui suit,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### Exercice 1 (\*\*)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  avec  $n$  entier impair. Montrer que la matrice  $A$  admet une valeur propre réelle.

**Corrigé :** La fonction  $x \in \mathbb{R} \mapsto \chi_A(x)$  est polynomiale donc continue, unitaire et de degré impair d'où

$$\chi_A(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} x^n + o(x^n)$$

Ainsi  $\chi_A(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$  et  $\chi_A(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\longrightarrow} -\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction  $x \mapsto \chi_A(x)$  s'annule sur  $\mathbb{R}$  ce qui prouve l'existence d'une racine réelle pour  $\chi_A$  et par conséquent

La matrice  $A$  admet une valeur propre réelle.

### Exercice 2 (\*\*\*)

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie,  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{L}(E)$  tels que

$$f \circ g - g \circ f = f$$

Montrer que  $f$  est nilpotent et que  $f$  et  $g$  admettent au moins un vecteur propre commun.

**Corrigé :** Par récurrence, on montre

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f^k \circ g - g \circ f^k = k f^k$$

Posons  $\mathcal{P}(k) : f^k \circ g - g \circ f^k = k f^k$

L'initialisation  $\mathcal{P}(0)$  est immédiate. Supposons  $\mathcal{P}(k)$  vraie pour  $k$  entier fixé. On a

$$\begin{aligned} f^{k+1} \circ g - g \circ f^{k+1} &= f \circ (f^k \circ g) - g \circ f^{k+1} = f \circ (g \circ f^k + k f^k) - g \circ f^{k+1} \\ &= (f \circ g) \circ f^k + k f^{k+1} - g \circ f^{k+1} = (g \circ f + f) \circ f^k + k f^{k+1} - g \circ f^{k+1} \\ f^{k+1} \circ g - g \circ f^{k+1} &= (k+1) f^{k+1} \end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. On pose

$$\forall h \in \mathcal{L}(E) \quad \Phi(h) = h \circ g - g \circ h$$

On a  $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$  et  $\Phi(f^k) = k f^k$  pour tout  $k$  entier. Si  $f$  n'est pas nilpotent, l'endomorphisme  $\Phi$  aurait un nombre infini de valeurs propres ce qui est absurde. Il existe donc  $p$  entier non nul tel que  $f^p = 0$ . Puis, pour  $x \in \text{Ker } f$ , on a  $f(g(x)) = g(f(x)) + f(x) = 0_E$  d'où  $g(x) \in \text{Ker } f$  ce qui prouve la stabilité de  $\text{Ker } f$  par  $g$ . L'endomorphisme induit  $g_{\text{Ker } f}$  est trigonalisable puisqu'on est dans un  $\mathbb{C}$ -ev. Un vecteur propre de  $g_{\text{Ker } f}$  est vecteur propre de  $g$  et également vecteur propre de  $f$ . On conclut

On a  $f$  nilpotent et  $f$  et  $g$  admettent au moins un vecteur propre commun.

**Variante :** On a montré  $f^k \circ g - g \circ f^k = kf^k$  pour tout  $k$  entier. Par combinaison, linéaire, on en déduit

$$\forall P \in \mathbb{C}[X] \quad P(f) \circ g - g \circ P(f) = (XP')(f)$$

On prend  $P = \pi_f$ . On en déduit  $X\pi'_f$  est annulateur de  $f$  d'où  $\pi_f | X\pi'_f$ . Or, les polynômes ont même degré avec  $\pi_f$  unitaire d'où  $X\pi'_f = d\pi_f$  notant  $d = \deg \pi_f$ . On résout l'équation différentielle  $x' - \frac{d}{t}x = 0$  sur  $]0; +\infty[$  et on trouve la droite  $\text{Vect}(t \mapsto t^d)$  comme espace de solutions. Ainsi, on a  $\pi_f = X^d$  ce qui prouve que  $f$  est nilpotent.

### Exercice 3 (\*\*\*)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie,  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Soit  $x \in E \setminus \{0_E\}$ . Justifier qu'il existe un unique polynôme unitaire  $\pi_{u,x} \in \mathbb{K}[X]$  vérifiant  $\pi_{u,x}(u)(x) = 0_E$  et divisant tout polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  vérifiant  $P(u)(x) = 0_E$ .
2. On suppose  $\pi_u = P^r$  avec  $P$  irréductible et  $r$  entier non nul. Montrer qu'il existe  $x \in E \setminus \{0_E\}$  tel que  $\pi_{u,x} = \pi_u$ .

**Corrigé :** 1. Soit  $x \in E \setminus \{0_E\}$ . On pose

$$I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(x) = 0_E\}$$

On vérifie sans difficulté que  $I_x$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ , non nul car  $\pi_u \in I_x$  avec  $\pi_u \neq 0$ . Ainsi, d'après le théorème de structure des idéaux de  $\mathbb{K}[X]$

Pour  $x \in E \setminus \{0_E\}$ , il existe  $\pi_{u,x}$  unitaire qui engendre l'idéal  $I_x$ .

2. Pour  $x \in E \setminus \{0_E\}$ , on a  $\pi_u \in I_x$  d'où  $\pi_{u,x} | \pi_u = P^r$  donc  $\pi_{u,x}$  est de la forme  $P^\alpha$  avec  $\alpha \in \llbracket 1; r \rrbracket$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  base de  $E$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , il existe  $\alpha_i \in \llbracket 1; r \rrbracket$  tel que  $\pi_{u,e_i} = P^{\alpha_i}$ . On choisit  $\alpha_q = \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \alpha_i$ . Ainsi, on a

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \pi_{u,e_q}(u)(e_i) = P^{\alpha_q}(u)(e_i) = P^{\alpha_q - \alpha_i}(u) \circ P^{\alpha_i}(u)(e_i) = 0$$

ce qui prouve que  $\pi_{u,e_q}$  s'annule sur la base  $\mathcal{B}$  donc est nul. Il s'ensuit  $\pi_u | \pi_{u,e_q}$  et ces polynômes sont donc associés et unitaires donc égaux. On conclut

Si  $\pi_u = P^r$  avec  $P$  irréductible et  $r$  entier non nul, il existe  $x \in E \setminus \{0_E\}$  tel que  $\pi_{u,x} = \pi_u$ .

### Exercice 4 (\*\*)

Soit  $E = \{f \in \mathcal{C}^0([0; +\infty[, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ . On pose

$$\forall f \in E \quad T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Justifier que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -ev et  $T \in \mathcal{L}(E)$ .
2. Déterminer les éléments propres de  $T$ .

**Corrigé :** 1. Notant  $\varphi : \mathcal{C}([0; +\infty[, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(0)$ , on a  $E = \text{Ker } \varphi$  sev de  $\mathcal{C}([0; +\infty[, \mathbb{R})$ . Soit  $f \in E$ . On a  $T(f)$  continue sur  $]0; +\infty[$  comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $]0; +\infty[$ . Puis, notant  $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ , on a

$$\forall x > 0 \quad T(f)(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} F'(0) = f(0) = 0$$

Ainsi, l'application  $T$  est à valeurs dans  $E$  et  $T$  est linéaire par linéarité de l'intégrale et du produit. Ainsi

$$\boxed{\text{L'ensemble } E \text{ est un } \mathbb{R}\text{-ev et } T \in \mathcal{L}(E).}$$

2. Soit  $\lambda$  réel et  $f \in E \setminus \{0\}$  tel que  $T(f) = \lambda f$ . Ainsi

$$\forall x \geq 0 \quad \int_0^x f(t) dt = \lambda x f(x)$$

Par dérivation, il vient

$$\forall x \geq 0 \quad \lambda x f'(x) + (\lambda - 1)f(x) = 0$$

Si  $\lambda = 0$ , alors  $f$  est nulle ce qui est exclu. Pour  $\lambda$  non nul, on trouve

$$f \in \text{Vect}(x \mapsto x^\alpha) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1 - \lambda}{\lambda}$$

On veut  $f$  continue en 0 avec  $f(0) = 0$  ce qui impose  $\alpha > 0$  d'où  $\lambda \in ]0; 1[$ . Réciproquement, on vérifie sans difficulté que  $\text{Vect}(x \mapsto x^\alpha)$  est bien une droite de vecteurs propres et on conclut

$$\boxed{\forall \lambda \in ]0; 1[ \quad \alpha = \frac{1 - \lambda}{\lambda} \text{ valeur propre de } T \text{ et } E_\alpha(T) = \text{Vect}(x \mapsto x^\alpha)}$$

### Exercice 5 (\*\*\*)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec  $\text{rg } A = 2$ . Déterminer une expression de  $\chi_A$  en fonction de  $\text{Tr}(A)$  et  $\text{Tr}(A^2)$ .

**Corrigé :** En complétant une base du noyau de  $A$  en base de  $\mathbb{K}^n$ , on trouve que  $A$  est semblable à  $M = \left( \begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & A' \end{array} \right)$  avec  $A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Ainsi, on a

$$\chi_A = X^{n-2}(X - (a + d)X + ad - bc) = X^{n-2}(X^2 - \text{Tr}(A)X + ad - bc)$$

On calcule (par blocs)  $A^2$  et il vient

$$M^2 = \left( \begin{array}{c|c} 0 & BA' \\ \hline 0 & A'^2 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad A'^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi 
$$\text{Tr}(A)^2 - \text{Tr}(A^2) = (a + d)^2 - (a^2 + 2bc + d^2) = 2(ad - bc)$$

Et par conséquent 
$$\boxed{\chi_A = X^{n-2} \left( X^2 - \text{Tr}(A)X + \frac{(\text{Tr } A)^2 - \text{Tr}(A^2)}{2} \right)}$$

### Exercice 6 (\*\*\*)

Soient  $A, B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1. On suppose qu'il existe  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec  $\text{rg } X = r \geq 1$  tel que  $AX = XB$ . Montrer que  $\chi_A$  et  $\chi_B$  ont un facteur commun de degré  $r$ .
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que, pour  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , l'équation  $AX - XB = M$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  admette une unique solution.

**Corrigé :** 1. Comme  $\text{rg } X = r$ , il existe  $P$  et  $Q$  dans  $GL_n(\mathbb{K})$  telles que  $X = PJ_rQ$  d'où

$$A'J_r = J_rB' \quad \text{avec} \quad A' = P^{-1}AP = \left( \begin{array}{c|c} A'_1 & A'_2 \\ \hline A'_3 & A'_4 \end{array} \right) \quad B' = Q^{-1}BQ = \left( \begin{array}{c|c} B'_1 & B'_2 \\ \hline B'_3 & B'_4 \end{array} \right)$$

Ainsi 
$$\left( \begin{array}{c|c} A'_1 & 0 \\ \hline A'_3 & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} B'_1 & B'_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

d'où 
$$A'_1 = B'_1 \quad \text{et} \quad A'_3 = 0 \quad B'_2 = 0$$

Par conséquent 
$$A = \left( \begin{array}{c|c} A'_1 & A'_2 \\ \hline 0 & A'_4 \end{array} \right) \quad B = \left( \begin{array}{c|c} B'_1 & 0 \\ \hline B'_3 & B'_4 \end{array} \right)$$

Ainsi 
$$\chi_{A'_1} | \chi_{A'} \quad \chi_{B'_1} | \chi_{B'} \quad \text{et} \quad \chi_{A'_1} = \chi_{B'_1}$$

Comme on a  $\chi_A = \chi_{A'}$  et  $\chi_B = \chi_{B'}$ , on conclut

Les polynômes  $\chi_A$  et  $\chi_B$  ont un facteur commun de degré  $r$ .

2. On choisit  $A = 0$  et  $B = \sum_{k=1}^{n-1} E_{k,k+1}$  d'où  $\chi_A = \chi_B = X^n$ . On a  $XB = 0$  d'où  $\text{Im } B \subset \text{Ker } X$  et  $\text{rg } B = n - 1$  d'où  $\text{rg } X \leq 1$ . Pour  $\text{rg } X \geq 2$ , on conclut

La réciproque est fausse.

3. On pose 
$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \Phi(X) = AX - XB$$

On a clairement  $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$  et on cherche donc une condition nécessaire et suffisante pour que  $\Phi$  soit bijective, c'est-à-dire  $\Phi$  injective puisqu'il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie. Si  $\text{Ker } \Phi \neq \{0\}$ , alors il existe  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$  telle que  $AX = XB$ . Par conséquent, les polynômes  $\chi_A$  et  $\chi_B$  ont un facteur commun de degré  $\text{rg}(X) \geq 1$  et donc une racine commune (ce facteur est scindé dans  $\mathbb{C}[X]$ ). Il en résulte que  $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) \neq \emptyset$ . Ainsi, la condition  $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$  est nécessaire pour  $\Phi$  bijective. Supposons  $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) \neq \emptyset$ . En remarquant  $\text{Sp}(B) = \text{Sp}(B^\top)$ , on prend  $U$  et  $V$  matrices colonnes non nulles telles que  $AU = \lambda U$  et  $B^\top V = \lambda V$  pour  $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$ . Alors, posant  $X = UV^\top$ , on a bien  $X \neq 0$  et on trouve  $\Phi(X) = 0$ . On conclut

$$\Phi \in GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \iff \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$$

## Exercice 7 (\*\*\*)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que si  $A$  admet une valeur propre complexe non réelle, alors il existe un plan vectoriel stable par  $A$ .

**Corrigé :** Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$  et  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  tels que  $AX = \lambda X$ . On note  $X_1 = \text{Re } X$ ,  $X_2 = \text{Im } X$ ,  $\lambda_1 = \text{Re } \lambda$  et  $\lambda_2 = \text{Im } \lambda$ . On a

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\iff AX_1 + iAX_2 = (\lambda_1 X_1 - \lambda_2 X_2) + i(\lambda_2 X_1 + \lambda_1 X_2) \\ &\iff \begin{cases} AX_1 = \lambda_1 X_1 - \lambda_2 X_2 \\ AX_2 = \lambda_2 X_1 + \lambda_1 X_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Justifions enfin que  $(X_1, X_2)$  est une famille libre de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Soit  $\alpha, \beta$  des réels tels que  $\alpha X_1 + \beta X_2 = 0$ . On a

$$\alpha X_1 + \beta X_2 = \alpha \frac{X + \bar{X}}{2} + \beta \frac{X - \bar{X}}{2i} = 0 \iff \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2i}\right)X + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2i}\right)\bar{X} = 0$$

Or, la famille  $(X, \bar{X})$  est une famille libre de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  puisqu'on a  $AX = \lambda X$  et passant au conjugué  $A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$  avec  $\lambda \neq \bar{\lambda}$  et il s'agit donc d'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. On en déduit

$$\begin{cases} \alpha - i\beta = 0 \\ \alpha + i\beta = 0 \end{cases}$$

et il s'agit d'un système de Cramer d'où  $\alpha = \beta = 0$ . Ainsi, la famille  $(X_1, X_2)$  est libre et le plan vectoriel  $\text{Vect}(X_1, X_2)$  est donc stable par  $A$  d'où

Il existe un plan vectoriel stable par  $A$ .

### Exercice 8 (\*\*)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $\chi_A$  divise  $\pi_A^n$ .

**Corrigé :** On se place dans  $\mathbb{C}$ . On a  $\chi_A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda)^{m_\lambda(A)}$  et  $\pi_A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$ . Comme  $\pi_A | \chi_A$  et que les racines de  $\pi_A$  sont exactement les valeurs propres de  $A$ , on a

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(A) \quad 1 \leq \alpha_\lambda \leq m_\lambda(A) \leq n \leq n\alpha_\lambda$$

d'où

$$\prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda)^{m_\lambda(A)} | \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda)^{n\alpha_\lambda} = \pi_A^n$$

Dans  $\mathbb{C}[X]$ , il en résulte que  $\chi_A | \pi_A^n$ . Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , on a l'existence de  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $\pi_A^n = Q\chi_A$ . Par conjugaison, comme  $\pi_A$  et  $\chi_A$  sont dans  $\mathbb{R}[X]$ , il vient  $\pi_A^n = \bar{Q}\chi_A$  d'où  $(Q - \bar{Q})\chi_A = 0$  puis  $Q = \bar{Q}$  par intégrité. La divisibilité a donc lieu dans  $\mathbb{K}[X]$  que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  et on conclut

$$\chi_A | \pi_A^n$$

### Exercice 9 (\*\*)

Soit  $n$  entier. On définit  $\varphi$  sur  $\mathbb{K}_n[X]$  par  $\varphi(P) = P(X+1)$  pour  $P \in \mathbb{K}_n[X]$ . Déterminer  $\pi_\varphi$ .

**Corrigé :** Posons  $\tau = \varphi - \text{id}$ . Pour  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , on a  $\tau(X^k) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j$  d'où  $\deg \tau(X^k) = k-1$  pour  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$  et par combinaison linéaire, on obtient

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X] \quad \deg \tau(P) = \begin{cases} \deg P - 1 & \text{si } \deg P \geq 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Par récurrence immédiate, on en déduit  $\tau^{n+1} = 0$  et  $\tau^n \neq 0$  puisque  $\tau^n(X^n) = n! \neq 0$ . On conclut

$$\pi_D = \chi_D = (X-1)^{n+1}$$

### Exercice 10 (\*\*)

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev admettant un polynôme minimal  $\pi_u$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

1. Montrer  $P(u) \in \text{GL}(E) \iff P \wedge \pi_u = 1$
2. Montrer que si  $P(u) \in \text{GL}(E)$ , alors  $P(u)^{-1} \in \mathbb{K}[u]$ .

**Corrigé :** 1. Si  $P \wedge \pi_u = 1$ , d'après le théorème de Bézout, il existe  $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que  $AP + B\pi_u = 1$  d'où

$$\text{id} = A(u) \circ P(u) + B(u) \circ \pi_u(u) = A(u) \circ P(u) = P(u) \circ A(u)$$

ce qui prouve le sens indirect. Supposons  $P \wedge \pi_u \neq 1$ . Notons  $D = P \wedge \pi_u$ . Comme  $D$  divise  $P$  et  $\pi_u$ , on a  $P = QD$  et  $\pi_u = RD$  avec  $Q$  et  $R$  dans  $\mathbb{K}[X]$ . Comme  $\pi_u$  est non nul, on a  $R$  et  $D$  non nuls et  $D$  non constant puisque  $D$  est unitaire avec  $D \neq 1$ . Il vient

$$R(u) \circ P(u) = R(u) \circ D(u) \circ Q(u) = \pi_u(u) \circ Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Si  $P(u) \in \text{GL}(E)$ , en composant par  $P(u)^{-1}$  à droite, on obtient  $R(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$  avec  $\deg R < \deg \pi_u$  ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{P(u) \in \text{GL}(E) \iff P \wedge \pi_u = 1}$$

**Variante :** Pour le sens direct, on peut aussi considérer  $P = \lambda \prod_{i=1}^r P_i^{\alpha_i}$  sa décomposition en facteurs irréductibles avec les  $\alpha_i$  entiers non nuls. Supposons qu'il existe  $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$  tel que  $\pi_u = P_i Q$  avec  $Q \in \mathbb{K}[X]$ . Il s'ensuit que  $\pi_u$  divise  $PQ$  d'où  $P(u) \circ Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$  et en composant par  $P(u)^{-1}$  à gauche, on en déduit  $Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$  avec  $Q \neq 0$  et  $\deg Q < \deg \pi_u$  (car  $P_i$  non constant) ce qui est absurde. On en déduit que pour tout  $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ , le polynôme irréductible  $P_i$  ne divise pas  $\pi_u$  autrement dit  $\pi_u \wedge P_i = 1$  et il s'ensuit  $P \wedge \pi_u = 1$ .

2. D'après ce qui précède, on a vu que si  $P(u)$  est inversible, alors il existe  $A \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $A(u) \circ P(u) = \text{id}$ , autrement dit  $A(u) = P(u)^{-1}$  et donc

$$\boxed{\text{Si } P(u) \in \text{GL}(E), \text{ alors } P(u)^{-1} \in \mathbb{K}[u].}$$

## Exercice 11 (\*\*\*)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec  $n \geq 2$ .

1. On suppose  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad |a_{i,i}| > R_i \quad \text{avec} \quad R_i = \sum_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i\}} |a_{i,j}|$

Montrer que  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ .

2. Pour  $(a, R) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$ , on note  $D_f(a, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq R\}$ . Montrer

$$\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n D_f(a_{i,i}, R_i)$$

Les ensembles  $D_f(a_{i,i}, R_i)$  sont appelés *disques de Gerschgorin*.

**Corrigé :** 1. Une telle matrice est dite à *diagonale dominante stricte*. Supposons que  $A \notin \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , autrement dit on dispose de  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$  telle que  $AX = 0$ . On note

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  avec les  $x_i \in \mathbb{K}$ . Comme  $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ , alors on dispose de  $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$  tel que

$$|x_{i_0}| = \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |x_i| > 0$$

Si ce maximum était nul, toutes les coordonnées de  $X$  seraient nulles ce qui contredirait l'hypothèse  $X$  non nulle. Par ailleurs, la  $i_0$ -ème ligne de  $AX$  est nulle donc

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j = 0 &\iff a_{i_0,i_0} x_{i_0} + \sum_{j \in \llbracket 1;n \rrbracket \setminus \{i_0\}} a_{i_0,j} x_j = 0 \\ &\iff |a_{i_0,i_0}| = \left| \sum_{j \in \llbracket 1;n \rrbracket \setminus \{i_0\}} a_{i_0,j} \frac{x_j}{|x_{i_0}|} \right|\end{aligned}$$

la division par  $|x_{i_0}|$  étant possible puisque le nombre est non nul. Par inégalité triangulaire et choix de  $|x_{i_0}| = \max_{i \in \llbracket 1;n \rrbracket} |x_i|$ , il vient alors

$$|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{j \in \llbracket 1;n \rrbracket \setminus \{i_0\}} |a_{i_0,j}| \underbrace{\left| \frac{x_j}{x_{i_0}} \right|}_{\leq 1} \leq \sum_{j \in \llbracket 1;n \rrbracket \setminus \{i_0\}} |a_{i_0,j}|$$

ce qui contredit l'hypothèse de départ faite sur A. Ainsi

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad AX = 0 \implies X = 0$$

d'où

$$\boxed{A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})}$$

**Remarque :** Ce résultat est souvent référencé sous l'intitulé *lemme d'Hadamard*.

2. Soit  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ . Par suite  $A - \lambda I_n \notin \text{GL}_n(\mathbb{K})$  d'où la négation du caractère à diagonale dominante stricte, *i.e.*

$$\exists i \in \llbracket 1;n \rrbracket \quad |a_{i,i} - \lambda| \leq R_i$$

Autrement dit

$$\boxed{\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n D_f(a_{i,i}, R_i)}$$

On a localisé le spectre dans les disques dits de *Gershgorin*.