

Corrigé du devoir en temps libre n°06

Problème I

L'homogénéité et l'inégalité triangulaire s'obtiennent sans difficulté pour N_1 et N_2 par homogénéité et inégalité triangulaire de $|\cdot|$ puis linéarité et croissance de l'intégrale. Pour $f \in E$, on a

$$N_1(f) = 0 \iff \begin{cases} |f(0)| = 0 \\ \int_0^1 |f'(t)| \, dt = 0 \end{cases} \underset{|f'| \text{ continue, positive}}{\iff} \begin{cases} f(0) = 0 \\ f' = 0 \end{cases} \iff f = 0$$

d'où la séparation de N_1 et on procède de même pour N_2 . Puis, pour $f \in E$, on a

$$N_1(f) \leq 4|f(0)| + 2 \int_0^1 |f'(t)| \, dt = 2N_2(f)$$

et
$$N_2(f) \leq 2|f(0)| + 4 \int_0^1 |f'(t)| \, dt = 2N_1(f)$$

On conclut

Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

Remarque : Les constantes sont optimales : avec $u : t \mapsto 1$, on a $N_2(u) = 2N_1(u)$ et avec $v : t \mapsto t$, on a $N_1(v) = 2N_2(v)$.

Problème II

1. Soit $(\lambda, A) \in \mathbb{C} \times E$. On a $\|\lambda A\| = \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |\lambda| \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = |\lambda| \|A\|$

par homogénéité de $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$. Pour $(A, B) \in E^2$, on a

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \sum_{j=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| \leq \|A\| + \|B\|$$

d'où
$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

Enfin, pour $A \in E$, on a

$$\begin{aligned} \|A\| = 0 &\iff \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = 0 \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = 0 \\ &\iff \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad a_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi

L'application $\|\cdot\|$ est une norme sur E .

2. On a

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad \sum_{k=1}^n |(AB)_{i,j}| &= \sum_{k=1}^n \left| \sum_{l=1}^n a_{i,l} b_{l,j} \right| \leq \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^n |a_{i,l}| |b_{l,j}| \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left(|a_{i,k}| \underbrace{\sum_{j=1}^n |b_{k,j}|}_{\leq \|B\|} \right) \leq \|A\| \|B\| \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall (A, B) \in E^2 \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|}$$

Remarque : Il s'agit en fait de la norme subordonnée $\|A\| = \sup_{\|X\|_\infty=1} \|AX\|_\infty$.

Problème III

L'homogénéité et l'inégalité triangulaire pour N_1 et N_2 résultent des propriétés de la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$. La séparation de $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ implique la séparation pour N_1 puis pour $f \in E$

$$N_2(f) = 0 \iff f' - f = 0 \iff f \in \text{Vect}(t \mapsto e^t) \underbrace{\iff}_{f(0)=0} f = 0_E$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Les applications } N_1 \text{ et } N_2 \text{ sont des normes sur } E.}$$

Par inégalité triangulaire, il vient

$$\forall f \in E \quad N_2(f) \leq N_1(f)$$

Soit $f \in E$ et $g = f' - f$. Déterminons une expression de f en fonction de g . Par résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec variation de la constante, on trouve

$$\forall t \in [0; 1] \quad f(t) = \int_0^t e^{t-s} g(s) \, ds$$

$$\text{D'où} \quad \forall t \in [0; 1] \quad |f(t)| \leq \|g\|_\infty \int_0^t e^{t-s} \, ds \leq (e - 1) N_2(f)$$

$$\text{puis} \quad \forall t \in [0; 1] \quad |f'(t)| \leq |f'(t) - f(t)| + |f(t)| \leq N_2(f) + \|f\|_\infty$$

et ainsi

$$N_1(f) \leq (2e - 1) N_2(f)$$

On conclut

$$\boxed{\text{Les normes } N_1 \text{ et } N_2 \text{ sont équivalentes.}}$$

On a

$$\forall f \in E \quad \|f\|_\infty \leq N_1(f) \leq (2e - 1) N_2(f)$$

En revanche, les autres inégalités sont en défaut. Soit $f_n : t \mapsto t^n$ avec n entier. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_n\|_\infty = 1 \quad N_1(f_n) = n + 1$$

d'où

$$\frac{N_1(f_n)}{\|f_n\|_\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Il s'ensuit que N_1 n'est pas équivalente à $\|\cdot\|_\infty$. Si N_2 est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$, alors N_1 est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$ par transitivité ce qui n'a pas lieu. On conclut

$$\boxed{\text{Les normes } N_1 \text{ et } N_2 \text{ ne sont pas équivalentes à } \|\cdot\|_\infty.}$$

Remarques : (a) On est sûr que $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas plus fine que N_2 sans quoi les deux normes seraient équivalentes ce qui est faux. On peut aussi le vérifier directement en observant par exemple, après une rapide étude de fonction

$$\forall n \geq 2 \quad N_2(f_n) = n - 1$$

(b) Par ailleurs, on en déduit

$$\forall n \geq 2 \quad \frac{N_2(f_n)}{N_1(f_n)} = \frac{n - 1}{n + 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Et avec $f : t \mapsto e^t - 1$, on trouve

$$N_1(f) = 2e - 1 \quad \text{et} \quad N_2(f) = 1$$

Ainsi, les constantes dans l'encadrement $N_2 \leq N_1 \leq (2e - 1)N_2$ sont optimales.

Problème IV

1. L'inégalité est trivialement vraie si a ou b est nul. Soient $a, b > 0$. Par concavité de $\ln$, on a

$$\frac{1}{p} \ln(a) + \frac{1}{q} \ln(b) \leq \ln\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right)$$

D'où

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2 \quad a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

2. Si les a_k ou les b_k sont tous nuls, le résultat est trivial. On suppose les a_k et les b_k non tous nuls. On pose

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \alpha_k = \frac{a_k^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p} \quad \beta_k = \frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

D'après le résultat de la première question, on a

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \alpha_k^{1/p} \beta_k^{1/q} \leq \frac{\alpha_k}{p} + \frac{\beta_k}{q}$$

Par sommation, il vient

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k^{1/p} \beta_k^{1/q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

D'où l'inégalité de Hölder

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/q}$$

3. L'homogénéité et la séparation sont immédiates. Soit $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$. On a

$$\|x + y\|_p^p \leq \sum_{k=1}^n |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k| (|x_k + y_k|)^{p-1}$$

D'après l'inégalité de Hölder en observant $(p-1)q = p$

$$\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)q} \right)^{1/q} = (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{p/q}$$

Si $x + y \neq 0$, l'inégalité triangulaire s'en déduit en divisant par $\|x + y\|_p^{p/q}$. Le résultat est trivialement vrai si $x + y = 0$ et on conclut

$$\boxed{\text{L'application } \|\cdot\|_p \text{ est une norme sur } \mathbb{K}^n.}$$

4. Soit $x \in \mathbb{K}^n$. Il existe un indice $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $|x_{i_0}| = \|x\|_\infty$. Par suite, on trouve

$$|x_{i_0}|^p \leq \sum_{k=1}^n |x_k|^p \leq n |x_{i_0}|^p$$

d'où

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$$

Comme $n^{1/p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$, on conclut par encadrement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{K}^n \quad \|x\|_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \|x\|_\infty}$$

Problème V (bonus)

La boule $B_{N_1}(0, 1)$ est un ouvert pour N_2 . Par conséquent, on dispose de $r > 0$ tel que $B_{N_2}(0, r) \subset B_{N_1}(0, 1)$. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. On pose

$$y = \frac{r}{2} \frac{x}{N_2(x)}$$

On a $N_2(y) = \frac{r}{2} < r$ d'où $N_1(y) < 1$ et par homogénéité, il s'ensuit

$$N_1(x) \leq \frac{2}{r} N_2(x)$$

qui vaut encore pour $x = 0_E$. Par symétrie des rôles, on conclut

Des normes qui définissent une même topologie sont équivalentes.