Devoir en temps libre n°06

Problème I

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$. On pose

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}_1(f) = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)| \;\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_2(f) = 2\,|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| \;\mathrm{d}t$$

Montrer que N_1 et N_2 sont des normes puis étudier leur équivalence.

Problème II

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right) \in \mathrm{E}$. On pose

$$\|\mathrm{A}\| = \underset{i\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]}{\mathrm{Max}} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E.
2. Établir $\qquad \forall(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$

Problème III

Soit $\mathrm{E} = \{f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. On pose

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_2(f) = \|f' - f\|_\infty$$

Montrer que N_1 et N_2 sont des normes puis les comparer entre elles et ensuite avec $\|\cdot\|_\infty$.

Problème IV

Soient $p, q > 0$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et n un entier non nul. On note

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \qquad \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}$$

1. Montrer $\qquad \forall(a,b) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad a^{1/p}\,b^{1/q} \leqslant \dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{q}$
2. Montrer que pour tout $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^n\right)^2$, on a
$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leqslant \|a\|_p \|b\|_q$$
3. Établir que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.
4. Pour $x \in \mathbb{K}^n$, déterminer $\qquad \lim\limits_{p\to+\infty} \|x\|_p$

Problème V (bonus)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev normé et N_1, N_2 des normes sur E qui définissent une même topologie, c'est-à-dire les mêmes ouverts. Les normes sont-elles équivalentes ?