Préparation à l'interrogation n°08

1 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de

$$1-\cos(t)^n = 1-\left(1-\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)\right)^n = 1-\left(1-\frac{nt^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)\right) = \frac{nt^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)$$

2. Équivalent en 1 de $\ln(x)$;
3. Développement asymptotique à 3 termes de $\sqrt{1+n} = \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = \dots$

2 Dérivation

Dérivée de f définie par $\qquad \forall t \in \left]-1\,;1\right[\qquad f(t) = \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)$

3 Trigonométrie

1. $\sin(p)-\sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$
2. $\cos(t)^2 = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$

4 Formules d'Euler

Soit θ réel. On a

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta) \qquad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

5 Inégalités triangulaires

Pour $(x,y) \in \mathbb{K}^2$, on a

$$|x+y| \leqslant |x|+|y| \qquad |x-y| \leqslant |x|+|y| \qquad \big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|$$

6 Séries numériques

1. Comparaison série/intégrale ;
2. Critère de d'Alembert ;
3. Critère des séries alternées ;
4. Contrôle du reste d'une série alternée.

7 Exercice type

Établir $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |xy| \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$

Corrigé : On a $(|x|-|y|)^2 \geqslant 0$ puis on développe le carré et l'équivalence suit.

8 Équation différentielle linéaire

Soient a, b dans $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ et $(t_0, x_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K}$. Il existe une unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) & \text{(L)} \\ x(t_0) = x_0 & \text{(CI)} \end{cases}$$

et celle-ci est donnée par

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(s)} b(s)\,\mathrm{d}s \right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{A}(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s$$

9 Exercice type

Pour $n \geqslant 2$, on pose $\Delta = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \forall i \neq j \qquad x_i \neq x_j\}$

Montrer que Δ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Corrigé : On pose $\varphi_{i,j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto x_j - x_i$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$. On a

$$\Delta = \bigcap_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \varphi_{i,j}^{-1}(\mathbb{R}^*)$$

Ainsi, l'ensemble Δ est une intersection finie d'images réciproques de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par les applications $\varphi_{i,j}$ continues car polynomiales. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \Delta \text{ est un ouvert.}}$$

Variante : On pose $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)$ polynomiale donc continue et on a $\Delta = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$.

10 Exercice type

Montrer que $\mathrm{K} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant 1\}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

Corrigé : On pose $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$ puis

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \forall i \in [\![0 ; n]\!] \qquad \varphi_i(x) = x_{i+1} - x_i$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \varphi_0(x) = x_1 \qquad \forall i \in [\![1 ; n-1]\!] \qquad \varphi_i(x) = x_{i+1} - x_i \quad \text{et} \quad \varphi_n(x) = 1 - x_n$$

Les φ_i sont continues car polynomiales et on a $\mathrm{K} = \bigcap_{i=0}^{n} \varphi_i^{-1}(\mathbb{R}_+)$ qui est fermé comme intersection de fermés (construits comme images réciproques de fermés par des applications continues). Puis, pour $x \in \mathrm{K}$, on a $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$ d'où le caractère borné de K. Comme l'espace $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, on conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble K est un compact de } \mathbb{R}^n.}$$

11 Questions de cours

Topologie, graphes usuels.