ISM MP, Informatique
Année 2025/2026

TP Informatique 08

Exercice 1

La *suite de Fibonacci* $(u_n)_n$ est définie par

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1. Écrire une fonction `fibo1(n)` d'argument `n` entier qui renvoie u_n en réalisant le calcul de manière descendante et sans mémoïsation.
2. Écrire une fonction `fibo2(n)` d'argument `n` entier qui renvoie u_n en réalisant le calcul de manière descendante et avec mémoïsation.
3. Écrire une fonction `fibo3(n)` d'argument `n` entier qui renvoie u_n en réalisant le calcul de manière ascendante.
4. Tester chaque fonction pour $n \in \{35, 100, 1000\}$ puis commenter les comportements observés.

Exercice 2

La *suite de Catalan* $(u_n)_n$ est définie par

$$u_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k u_{n-1-k}$$

1. Écrire une fonction `cata1(n)` d'argument `n` entier qui renvoie u_n en réalisant le calcul de manière descendante et sans mémoïsation.
2. Écrire une fonction `cata2(n)` d'argument `n` entier qui renvoie u_n en réalisant le calcul de manière descendante et avec mémoïsation.
3. Écrire une fonction `cata3(n)` d'argument `n` entier qui renvoie u_n en réalisant le calcul de manière ascendante.
4. Tester chaque fonction pour $n \in \{17, 100, 1000\}$ puis commenter les comportements observés.

Exercice 3

On rappelle que le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ avec k et n entiers désigne le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments (choix de k éléments parmi n sans ordre ni répétition). On a la relation de Pascal

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^{*2} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

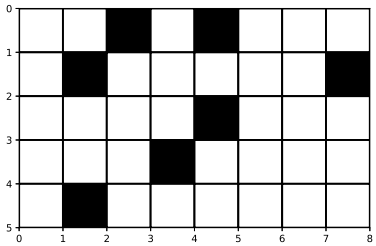
1. Écrire une fonction `binom1(n,k)` d'arguments `n` et `k` entiers qui renvoie $\binom{n}{k}$ en réalisant le calcul de manière descendante et sans mémoïsation.
2. Écrire une fonction `binom2(n,k)` d'arguments `n` et `k` entiers qui renvoie $\binom{n}{k}$ en réalisant le calcul de manière descendante avec mémoïsation.
3. Écrire une fonction `binom3(n,k)` d'arguments `n` et `k` entiers qui renvoie $\binom{n}{k}$ en réalisant le calcul de manière ascendante puis modifier la fonction pour qu'elle renvoie la totalité du triangle de Pascal.
4. Tester chaque fonction pour $n = 10$ et $k \in [\![0 \,;\, n]\!]$.

Exercice 4

Une pièce quadrillée est modélisée par une liste de listes : une case vide est représentée par 0 et un mur est représenté par 2. Par exemple, la liste

```
[[0,0,2,0,2,0,0,0],
 [0,2,0,0,0,0,0,2],
 [0,0,0,0,2,0,0,0],
 [0,0,0,2,0,0,0,0],
 [0,2,0,0,0,0,0,0]]
```

représente la configuration de l'image ci-contre



On se propose de déterminer un plus court chemin depuis la case $(0, 0)$ en haut à gauche vers la case $(\mathrm{L}-1, \mathrm{C}-1)$ en bas à droite avec L le nombre de lignes de la pièce et C le nombre de colonnes.

⚠ Les seuls déplacements autorisés sont : vers la droite et vers le bas.

On considère que le coût d'accès à une case vide est égal à 1 et que le coût d'accès à une case murée est égal à $+\infty$. Pour $(i, j) \in [\![0 ; \mathrm{L}-1]\!] \times [\![0 ; \mathrm{C}-1]\!]$, on note $c_{i,j}$ le coût d'accès à la case (i, j) et $t_{i,j}$ le coût d'un plus court chemin depuis $(0, 0)$ vers (i, j).

Les fonctions sont à compléter dans le fichier `TP08_EX04.py`.

1. Pour $j \in [\![1 ; \mathrm{C}-1]\!]$, déterminer $t_{0,j}$ en fonction de $t_{0,j-1}$ et $c_{0,j}$ puis pour $i \in [\![1 ; \mathrm{L}-1]\!]$, déterminer $t_{i,0}$ en fonction de $t_{i-1,0}$ et $c_{i,0}$.
2. Pour $(i, j) \in [\![1 ; \mathrm{L}-1]\!] \times [\![1 ; \mathrm{C}-1]\!]$, déterminer $t_{i,j}$ en fonction de $t_{i,j-1}$, $t_{i-1,j}$et $c_{i,j}$.
3. Compléter la fonction `ppc_tab(config)` d'argument `config` une liste de listes représentant une pièce, qui renvoie la matrice $(t_{i,j})_{(i,j)\in[\![0 ; \mathrm{L}-1]\!]\times[\![0 ; \mathrm{C}-1]\!]}$ de manière ascendante.
4. Compléter la fonction `ppc(config)` d'argument `config` une liste de listes représentant une pièce, qui renvoie, s'il existe un plus court chemin depuis $(0, 0)$ vers $(\mathrm{L}-1, \mathrm{C}-1)$, la liste de listes avec des 1 placés sur les cases du plus court chemin obtenu avec le poids de ce plus court chemin et `False` sinon.
5. Tester le programme pour différentes configurations.