

Feuille d'exercices n°30

Exercice 1 (***)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $\mathcal{O} = \{P \in E \mid P(0) \neq 0\}$ et on note

$$\forall P \in E \quad N_1(P) = \sup_{t \in [0;1]} |P(t)| \quad N_2(P) = \sup_{t \in [1;2]} |P(t)|$$

Déterminer la nature topologique de $\mathcal{O}$ pour les normes N_1 et N_2 .

Corrigé : Notons $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto P(0)$. L'application est clairement continue pour N_1 et on a $\mathcal{O} = \varphi^{-1}(\{0\})$. Puis, la suite $(P_n)_n$ avec $P_n = \frac{1}{n}$ pour n entier non nul est à valeurs dans $\mathcal{O}$, convergente de limite nulle donc hors de $\mathcal{O}$ et par conséquent

L'ensemble $\mathcal{O}$ est ouvert non fermé pour la norme N_1 .

Posons $P_n = (1 - X/2)^n$ pour n entier. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(P_n) = 1 \quad \text{et} \quad N_2(P_n) = \sup_{t \in [1;2]} \left| \left(1 - \frac{t}{2}\right)^n \right| = \frac{1}{2^n}$$

Ainsi

$$P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{N_2} 0 \quad \text{et} \quad \varphi(P_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \neq \varphi(0)$$

L'application φ n'est donc pas continue pour N_2 . Considérons $Q_n = P_n - 1$ pour tout n entier. On a $Q_n \in E \setminus \mathcal{O}$ pour tout n entier et $Q_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{N_2} -1 \notin E \setminus \mathcal{O}$ d'où $E \setminus \mathcal{O}$ n'est pas fermé, autrement dit $\mathcal{O}$ n'est pas un ouvert de E . De même, on a $P_n \in \mathcal{O}$ pour tout n entier et $P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{N_2} 0$ avec $0 \notin \mathcal{O}$, donc $\mathcal{O}$ n'est pas un fermé de E . On conclut

L'ensemble $\mathcal{O}$ n'est ni ouvert, ni fermé pour la norme N_2 .

Exercice 2 (***)

Montrer qu'une somme de fermés n'est pas nécessairement fermée.

Corrigé : Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $F_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. Notons $\varphi : (x, y) \mapsto y$ et $\psi : (x, y) \mapsto xy - 1$ polynomiales donc continues, on a

$$F_1 = \varphi^{-1}(\{0\}) \quad \text{et} \quad F_2 = \psi^{-1}(\{0\})$$

ce qui prouve leur fermeture. Puis, on a

$$F_1 + F_2 = \left\{ \left(x + y, \frac{1}{y} \right), (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \right\}$$

L'inclusion $F_1 + F_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est immédiate. Pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, on a

$$\left(x + y, \frac{1}{y} \right) = (a, b) \iff (x, y) = \left(a - \frac{1}{b}, \frac{1}{b} \right)$$

ce qui prouve

$$F_1 + F_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

Cet ensemble n'est pas fermé puisque la suite $\left(0, \frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ est à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, convergente mais la limite n'est pas dans cet ensemble.

Dans $\mathbb{R}$, c'est possible mais plus délicat. On a $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ dense dans $\mathbb{R}$ (non trivial), distinct de $\mathbb{R}$ et somme de deux fermés. Ou aussi, en considérant

$$F_1 = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad F_2 = \left\{-n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ est à valeurs dans $F_1 + F_2$ mais pas sa limite. On conclut

Une somme de fermés n'est pas nécessairement fermée.

Exercice 3 (***)

Soit n entier non nul et Ω_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindé à racines simples de degré égal à n . Montrer que Ω_n est un ouvert.

Corrigé : Soit $P \in \Omega_n$. On note $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ les racines distinctes de P . Soit $\beta_0, \dots, \beta_n$ des réels tels que $\beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_n < \beta_n$. On considère $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, Q \mapsto (Q(\beta_0), \dots, Q(\beta_n))$. L'application f est linéaire sur un espace de dimension finie donc continue. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on peut choisir $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que si $\|Q - P\| \leq \varepsilon$, alors $Q(\beta_i)P(\beta_i) > 0$ pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Par suite, on a $Q(\beta_i)Q(\beta_{i+1}) < 0$ pour tout $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ ce qui prouve que Q est scindé à racines simples. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(P, \varepsilon) \subset \Omega_n$. On conclut

L'ensemble Ω_n est un ouvert.

Exercice 4 (***)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Déterminer deux normes sur E , une pour laquelle l'endomorphisme de dérivation est continue et l'autre pour laquelle il ne l'est pas.

Corrigé : On note $D \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme de dérivation. Pour n entier, on pose $P_n = X^n$.

On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|P_n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad D(P_n) = nX^{n-1} \quad \text{et} \quad \|D(P_n)\|_1 = \int_0^1 nt^{n-1} dt = 1$

Ainsi $P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_1} 0 \quad \text{et} \quad D(P_n) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_1} D(0)$

Pour $P \in E$, on pose $N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$

On vérifie sans difficulté que N est une norme. Puis

$$\forall P \in E \quad N(D(P)) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k+1)}(0)| = N(P) - |P(0)| \leq N(P)$$

Ainsi, l'application linéaire D est lipschitzienne en 0 pour la norme N . On conclut

La dérivation D est continue pour N , discontinue pour $\|\cdot\|_1$.

Exercice 5 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn et A une partie non vide bornée de E . On note $\delta(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} \|x - y\|$. Montrer

$$\delta(A) = \delta(\bar{A}) = \delta(\partial A)$$

Corrigé : Il existe $M \geq 0$ tel que $\|x\| \leq M$ pour tout $x \in A$. Ainsi, pour $x \in \bar{A}$, comme il existe $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ avec $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$, on a

$$\|x\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| \leq M$$

On en déduit que $\bar{A}$ est bornée et $\partial A \subset \bar{A}$ également. Avec $A \subset \bar{A}$, il vient clairement $\delta(A) \leq \delta(\bar{A})$. Soit $(a, b) \in \bar{A}^2$. Il existe $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ dans $A^{\mathbb{N}}$ telles que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ et $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$. Ainsi

$$\|a - b\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|a_n - b_n\| \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|a_n - b_n\| \leq \delta(A)$$

Par conséquent

$$\boxed{\delta(A) = \delta(\bar{A})}$$

Soit $(a, b) \in A^2$ distincts (si A est un singleton, le problème est trivial). On pose $\varphi : t \mapsto a + t(b - a)$. L'ensemble $I = \{t \in \mathbb{R} \mid \varphi(t) \in A\}$ est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. En effet, pour $t \in I$, on a

$$|t| = \frac{1}{\|b - a\|} \|t(b - a) + a - a\| \leq \frac{1}{\|b - a\|} (M + \|a\|)$$

On note $t_0 = \inf I$ et $t_1 = \sup I$. On a clairement $t_1 \geq 1$ et $t_0 \leq 0$. Par caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures, on obtient $\varphi(t_0) \in \bar{A}$ et $\varphi(t_1) \in \bar{A}$. Supposons $\varphi(t_1) \in \overset{\circ}{A}$. Il existe alors $r > 0$ tel que $B(\varphi(t_1), r) \subset A$. Il s'ensuit

$$\varphi\left(t_1 + \frac{r}{2\|b - a\|}\right) = \varphi(t_1) + \frac{r}{2} \frac{b - a}{\|b - a\|} \in B(\varphi(t_1), r) \subset A \quad \text{et} \quad t_1 + \frac{r}{2\|b - a\|} > t_1$$

ce qui est absurde par choix de t_1 . On en déduit que $\varphi(t_1) \notin \overset{\circ}{A}$ d'où $\varphi(t_1) \in \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \partial A$. On procède à l'identique pour $\varphi(t_0)$. Enfin, on a

$$\|\varphi(t_1) - \varphi(t_0)\| = \|(t_1 - t_0)(b - a)\| = (t_1 - t_0)\|b - a\| \geq \|b - a\|$$

d'où

$$\forall (a, b) \in A^2 \quad \delta(\partial A) \geq \|b - a\|$$

Passant à la borne supérieure, on obtient $\delta(\partial A) \geq \delta(A)$ et comme $\partial A \subset A$, on a $\delta(\partial A) \leq \delta(\bar{A}) = \delta(A)$. On conclut

$$\boxed{\delta(A) = \delta(\bar{A}) = \delta(\partial A)}$$

Exercice 6 (***)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_{\infty}$ et $A = \left\{f \in E \mid f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(t) dt \geq 1\right\}$.

1. Montrer que A est une partie fermée de E .

2. Montrer que $\forall f \in A \quad \|f\|_{\infty} > 1$

3. Calculer $d(0, A)$.

Corrigé : 1. Notons $\varphi_1 : f \mapsto f(0)$ et $\varphi_2 : f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$. Les applications φ_1 et φ_2 sont continues pour $\|\cdot\|_\infty$ et on a

$$A = \varphi_1^{-1}(\{0\}) \cap \varphi_2^{-1}([1; +\infty[)$$

La partie A est donc une intersection d'images réciproques de fermés par des applications continues. On conclut

$$\boxed{\text{La partie A est un fermé.}}$$

2. Soit $f \in A$ avec $\|f\|_\infty \leq 1$. On a

$$1 \leq \int_0^1 f(t) dt \leq \|f\|_\infty \leq 1 \implies \int_0^1 f(t) dt = 1 \implies \int_0^1 (1 - f(t)) dt = 0$$

La fonction $t \mapsto 1 - f(t)$ est continue positive d'intégrale nulle donc nulle. Il s'ensuit que f est constante égale à 1 ce qui contredit son annulation en 0. Ainsi

$$\boxed{\forall f \in A \quad \|f\|_\infty > 1}$$

3. D'après ce qui précède, on a clairement $d(0, A) \geq 1$. Pour n entier avec $n \geq 2$, on pose f_n affine par morceaux avec $f_n(t) = n^2 t / (n-1)$ pour $t \in \left[0; \frac{1}{n}\right]$ puis constante sur $\left[\frac{1}{n}; 1\right]$. On

trouve $\int_0^1 f_n(t) dt \geq 1$ et $\|f_n\|_\infty = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. On conclut

$$\boxed{d(0, A) = 1}$$

Exercice 7 (**)

Soit X un ensemble et $E = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Soit L une forme linéaire sur E *positive*, c'est-à-dire

$$\forall f \in E \quad f \geq 0 \implies L(f) \geq 0$$

$$1. \text{ Montrer } \forall (f, g) \in E^2 \quad f \leq g \implies L(f) \leq L(g)$$

2. En déduire que L est une application continue.

$$3. \text{ Montrer } L \neq 0 \iff L(1) \neq 0$$

$$4. \text{ Établir } \forall (f, g) \in E^2 \quad L(fg)^2 \leq L(f^2)L(g^2)$$

Corrigé : 1. Soit $(f, g) \in E^2$ avec $f \leq g$. On a $g - f \geq 0$ et par positivité de L , il vient

$$L(g) - L(f) = L(g - f) \geq 0$$

Ainsi

$$\boxed{\forall (f, g) \in E^2 \quad f \leq g \implies L(f) \leq L(g)}$$

2. Soit $f \in E$. On a

$$-\|f\|_\infty \leq f \leq \|f\|_\infty$$

D'où

$$-\|f\|_\infty L(1) = L(-\|f\|_\infty) \leq L(f) \leq L(\|f\|_\infty) = \|f\|_\infty L(1)$$

Ainsi

$$\boxed{\forall f \in E \quad |L(f)| \leq \|f\|_\infty L(1)}$$

d'où le caractère lipschitzien en zéro et donc la continuité de f .

3. Le sens indirect est immédiat et le sens direct vient par contraposition avec l'inégalité précédente. Ainsi

$$\boxed{L \neq 0 \iff L(1) \neq 0}$$

4. Soit $(f, g) \in E^2$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = L((tf + g)^2) = t^2 L(f^2) + 2tL(fg) + L(g^2)$$

On a $(tf + g)^2 \geq 0$ pour tout t réel d'où la positivité de φ d'après la positivité de L . Si $L(f^2) > 0$, la fonction φ est un trinôme à valeurs positives dont le discriminant ne peut être strictement positif. Ainsi, on a

$$L(fg)^2 \leq L(f^2)L(g^2)$$

Si $L(f^2) = 0$, la fonction $t \mapsto \varphi(t) = 2tL(fg) + L(g^2)$ est affine de signe constant positif ce qui n'est possible que si $L(fg) = 0$ et l'inégalité est donc encore vraie. Finalement

$$\boxed{\forall (f, g) \in E^2 \quad L(fg)^2 \leq L(f^2)L(g^2)}$$

Remarque : Il s'agit exactement de la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz ce qui était totalement prévisible puisque l'application $(f, g) \mapsto L(fg)$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur E .

Exercice 8 (****)

L'ensemble $\mathcal{D}_n^s(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à valeurs propres simples est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer l'intérieur de $\mathcal{D}_n^s(\mathbb{C})$.

Corrigé : Soit $M \in \mathcal{D}_n^s(\mathbb{C})$. Supposons qu'il existe $(M_p)_p \in (E \setminus \mathcal{D}_n^s(\mathbb{C}))^{\mathbb{N}}$ tel que $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} M$. Notons $\text{Sp}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ valeurs deux à deux distinctes. Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Supposons que pour tout p entier, on a ait $\text{Sp}(M_p) \cap D(\lambda_i, \delta) = \emptyset$ avec $\delta > 0$. Notant $\chi_{M_p}(X) = \prod_{k=1}^n (X - \mu_{k,p})$, on aurait $|\mu_{k,p} - \lambda_i| \geq \delta$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ d'où

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad |\chi_{M_p}(\lambda_i)| \geq \delta^n$$

Or, par continuité du déterminant, on a

$$\chi_{M_p}(\lambda_i) = \det(\lambda_i I_n - M_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \det(\lambda_i I_n - M) = \chi_M(\lambda_i) = 0$$

ce qui contredit l'inégalité précédente. Ainsi

$$\exists p_0 \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall p \geq p_0 \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{Sp}(M_p) \cap D(\lambda_i, \delta) \neq \emptyset$$

On choisit alors $\delta = \min_{i \neq j} \frac{|\lambda_i - \lambda_j|}{2}$. Il s'ensuit que les disques $D(\lambda_i, \delta)$ sont deux à deux disjoints et par conséquent, le spectre de M_p pour $p \geq p_0$ est formé de n valeurs distinctes ce qui est impossible par hypothèse. On en déduit

$$M \notin \overline{E \setminus \mathcal{D}_n^s(\mathbb{C})} = E \setminus (\mathcal{D}_n^s(\mathbb{C}))^\circ$$

S'ensuit l'inclusion $\mathcal{D}_n^s(\mathbb{C}) \subset (\mathcal{D}_n^s(\mathbb{C}))^\circ$ et l'inclusion réciproque est immédiate. Ainsi

$$\boxed{\mathcal{D}_n^s(\mathbb{C}) = (\mathcal{D}_n^s(\mathbb{C}))^\circ}$$

Variante : On peut aussi utiliser le résultant (voir feuille 15 exercice 6). Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a

$$M \in \mathcal{D}_n^s(\mathbb{C}) \iff \chi_M \text{ scindé à racines simples} \iff \chi_M \wedge \chi'_M = 1$$

Posons

$$\varphi: \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} \\ M \longmapsto \text{Res}[\chi_M, \chi'_M] \end{cases}$$

On en déduit

$$\mathcal{D}_n^s(\mathbb{C}) = \varphi^{-1}(\mathbb{C}^*)$$

Or, les coefficients de χ_M sont polynomiaux en les coefficients de M et ceci vaut également pour χ'_M et par suite, le résultant $\text{Res}[\chi_M, \chi'_M]$ est polynomial en les coefficients de M d'où la continuité de φ . Ainsi, l'ensemble $\mathcal{D}_n^s(\mathbb{C})$ est image réciproque d'un ouvert par une application continue d'où

L'ensemble $\mathcal{D}_n^s(\mathbb{C})$ est ouvert.

Exercice 9 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn. Montrer que les seules parties ouvertes et fermées de E sont $\emptyset$ et E lui-même.

Corrigé : Soit A une partie ouverte et fermée et non vide de E . Supposons $A \neq E$. Soit $a \in A$ et $b \notin A$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = a + t(b - a) \quad \text{et} \quad I = \{t \in [0; 1] \mid \varphi(t) \in A\}$$

L'ensemble I est une partie non vide car $0 \in I$ et majorée par 1 donc admet une borne supérieure finie $\alpha \in [0; 1]$. Par caractérisation séquentielle, il existe $(\alpha_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$.

L'application φ est continue car $\|b - a\|$ -lipschitzienne et par continuité, on a

$$\varphi(\alpha_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(\alpha) \in \bar{A} = A$$

Par ailleurs, l'ensemble A est ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $B(\varphi(\alpha), r) \subset A$. Il s'ensuit

$$\varphi\left(\alpha + \frac{r}{2\|b - a\|}\right) = \varphi(\alpha) + \frac{r}{2} \frac{b - a}{\|b - a\|} \in B(\varphi(\alpha), r) \subset A \quad \text{et} \quad \alpha + \frac{r}{2\|b - a\|} > \alpha$$

ce qui est absurde par définition de α en tant que borne supérieure de I . L'hypothèse qu'il existe une partie A ouverte et fermée non vide de E et distincte de E est donc fausse. On conclut

Les parties ouvertes et fermées de E sont $\emptyset$ et E lui-même.

Variantes : (a) On a $\varphi(1) = b \notin A$ d'où $\alpha < 1$ et par définition de α , on a $\varphi(t) \notin A$ pour tout $t \in]\alpha; 1]$. Comme $E \setminus A$ est fermé, considérant une suite $(\beta_n)_n \in]\alpha; 1]^{\mathbb{N}}$ avec $\beta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$, il vient par continuité

$$\varphi(\beta_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(\alpha) \in E \setminus A$$

ce qui contredit $\varphi(\alpha) \in A$.

(b) On montre que $\mathbb{1}_A$ est continue. Si $x \in A$, alors il existe U ouvert $\subset A$ tel que $\mathbb{1}_A(y) = 1$ pour tout $y \in U$ d'où la continuité. Si $x \notin A$, on fait de même puisque $E \setminus A$ est ouvert. Ainsi, on a $t \mapsto \mathbb{1}_A(xt + (1 - t)y)$ continue avec $x \in A$ et $y \notin A$ et on obtient une contradiction.