

Feuille d'exercices n°28

Exercice 1 (*)

Soit $E = \mathbb{R}^2$. Représenter les boules unités fermées pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 2 (*)

Dans $\mathbb{R}^n$, montrer que les pavés ouverts sont des ouverts et que les pavés fermés sont des fermés.

Exercice 3 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn et A, B des parties de E avec A ou B ouvert. Montrer que $A + B$ est un ouvert.

Exercice 4 (*)

Soit A une partie de E . Déterminer $\partial(E \setminus A)$.

Exercice 5 (**)

Déterminer l'intérieur d'une sphère.

Exercice 6 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn et A, B des parties de E .

1. Si $A \subset B$, comparer $\overset{\circ}{A}$ avec $\overset{\circ}{B}$ et $\bar{A}$ avec $\bar{B}$.
2. Comparer $(A \cup B)^\circ$ avec $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ puis $(A \cap B)^\circ$ avec $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
3. Même question pour l'adhérence.

Exercice 7 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn et F un fermé de E .

1. Montrer que F peut s'écrire comme image réciproque d'un fermé par une application continue de E dans $\mathbb{R}$.
2. En déduire que F peut s'écrire comme intersection décroissante d'ouverts de E .

Exercice 8 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn et F un sev de E .

1. Montrer que $\bar{F}$ est un sev de E .
2. Montrer qu'un hyperplan est soit dense, soit fermé.

Exercice 9 (**)

Montrer la continuité de l'application qui à $M \in GL_n(\mathbb{K})$ associe son inverse.

Exercice 10 (**)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$.

1. Déterminer une norme sur E telle que le produit dans E soit continu.
2. Pour E muni de $\|\cdot\|_1$, le produit est-il continu ?

Exercice 11 (**)

L'application définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}[X]$ par $M \mapsto \pi_M$ est-elle continue ?

Exercice 12 (**)

On pose
$$A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^* \right\} \quad B = A \cup \{0\}$$

Discuter de la nature topologique des ensembles A et B .

Exercice 13 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn.

1. Soit $a \in E$ et $r > 0$. Montrer $\text{Vect}(B(a, r)) = E$.
2. Montrer que tout sev strict de E est d'intérieur vide.

Exercice 14 (*)

Étudier la continuité éventuelle des applications suivantes :

$$1. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad 2. f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^x - e^y}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ e^x & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 15 (*)

On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = x^2 - xy + y^2$

Étudier si f admet une limite pour $\|(x, y)\| \rightarrow +\infty$.

Exercice 16 (*)

On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (x^2 - y^2)^2 - y^3 + xy$

Étudier si f admet une limite pour $\|(x, y)\| \rightarrow +\infty$.