

Feuille d'exercices n°29

Exercice 1 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev normé, $a \in E$ et $r > 0$. Montrer $\overline{B(a, r)} = B_f(a, r)$.

Exercice 2 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn et $A \subset E$.

1. Montrer $A \text{ fermé} \iff \partial A \subset A$
2. Montrer $A \text{ ouvert} \iff A \cap \partial A = \emptyset$

Exercice 3 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn et A, B deux parties non vides de E . On définit $d(A, B) = \inf_{(x, y) \in A \times B} \|x - y\|$.

Montrer $d(A, B) = d(\bar{A}, \bar{B})$

Exercice 4 (***)

Soient A et B deux fermés disjoints de E un $\mathbb{K}$ -evn.

1. Trouver $f \in \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ tel que $f|_A = 0$ et $f|_B = 1$.
2. En déduire qu'il existe des ouverts U et V disjoints tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Exercice 5 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn et A une partie convexe de E . Montrer que $\bar{A}$ et $\overset{\circ}{A}$ sont convexes.

Exercice 6 (***)

Montrer qu'une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé.

Exercice 7 (***)

Soit $E = \{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n| \text{ converge}\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ pour $u \in E$ et $\varphi \in \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique $(y_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bornée tel que $\varphi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n y_n$ pour tout $u \in E$.

Exercice 8 (**)

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \chi_{AB} = \chi_{BA}$
3. Montrer $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{Com}(AB) = (\text{Com } A)(\text{Com } B)$

Exercice 9 (***)

Pour $n \geq 2$, on pose $\Delta = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \neq j \quad x_i \neq x_j\}$

Déterminer $\bar{\Delta}$ et $\overset{\circ}{\Delta}$.

Exercice 10 (***)

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}_n^s(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à valeurs propres simples est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. En déduire une nouvelle démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 11 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn.

1. Montrer que pour U, V ouverts, on a

$$\bar{U} = \bar{V} = E \implies \overline{U \cap V} = E$$

2. En déduire que pour F, G fermés, on a

$$\overset{\circ}{F} = \overset{\circ}{G} = \emptyset \implies (F \cup G)^\circ = \emptyset$$

Exercice 12 (***)

Soit E un evn et $A \subset E$. Un point $x \in A$ est dit *isolé* s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$.

On note $\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^2 = I_n\}$

1. Montrer que I_n est un point isolé de $\mathcal{S}$.
2. Déterminer tous les points isolés de $\mathcal{S}$.

Exercice 13 (***)

Soit n entier non nul et $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$. On note R_p l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang $\geq p$. Montrer que R_p est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 14 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn et $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_n$ est

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{X_n} \quad \text{avec} \quad X_n = \{x_k, k \geq n\}$$

Exercice 15 (***)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -evn et $f : E \rightarrow F$. Montrer :

$$f \text{ continue} \iff \forall B \subset F \quad \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$$

Peut-on remplacer l'inclusion par une égalité ?