

Feuille d'exercices n°30

Exercice 1 (***)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $\mathcal{O} = \{P \in E \mid P(0) \neq 0\}$ et on note

$$\forall P \in E \quad N_1(P) = \sup_{t \in [0;1]} |P(t)| \quad N_2(P) = \sup_{t \in [1;2]} |P(t)|$$

Déterminer la nature topologique de $\mathcal{O}$ pour les normes N_1 et N_2 .

Indications : Étudier la continuité de l'application $P \in E \mapsto P(0)$ puis considérer une suite simple à valeurs dans $E \setminus \mathcal{O}$ pour discuter selon la norme N_1 . Considérer la suite $(P_n)_n$ avec $P_n = (1 - X/2)^n$ et $(1 - P_n)_n$ pour discuter selon la norme N_2 .

Exercice 2 (***)

Montrer qu'une somme de fermés n'est pas nécessairement fermée.

Indications : Chercher un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (***)

Soit n entier non nul et Ω_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindé à racines simples de degré égal à n . Montrer que Ω_n est un ouvert.

Indications : Pour $P \in \Omega_n$, notant $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ les racines de P , considérer $\beta_0, \dots, \beta_n$ tels que $\beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_n < \beta_n$ puis $f : \mathbb{Q} \mapsto (\mathbb{Q}(\beta_0), \dots, \mathbb{Q}(\beta_n))$ et remarquer que f linéaire sur un espace de dimension finie.

Exercice 4 (***)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Déterminer deux normes sur E , une pour laquelle l'endomorphisme de dérivation est continue et l'autre pour laquelle il ne l'est pas.

Indications : Étudier le comportement de D vis-à-vis des normes classiques puis considérer une norme faisant intervenir tous les ordres de dérivation.

Exercice 5 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn et A une partie non vide bornée de E . On note $\delta(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} \|x - y\|$. Montrer

$$\delta(A) = \delta(\bar{A}) = \delta(\partial A)$$

Indications : Montrer que $\bar{A}$ est bornée puis $\delta(A) = \delta(\bar{A})$ par double inégalité. Pour $\delta(\bar{A}) \leq \delta(A)$, utiliser une caractérisation séquentielle des points adhérents. Puis, pour a, b distincts dans A , considérer $\varphi : t \mapsto a + t(b - a)$ et $I = \{t \in \mathbb{R} \mid \varphi(t) \in A\}$. Montrer que I est une partie non vide, bornée de $\mathbb{R}$ puis, notant $t_0 = \inf I$ et $t_1 = \sup I$, établir que $\varphi(t_0)$ et $\varphi(t_1)$ sont sur la frontière. Conclure.

Exercice 6 (***)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et $A = \left\{ f \in E \mid f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t) dt \geq 1 \right\}$.

1. Montrer que A est une partie fermée de E .
2. Montrer que $\forall f \in A \quad \|f\|_\infty > 1$
3. Calculer $d(0, A)$.

Indications : 1. Écrire A comme intersection d'images réciproques.

2. Procéder par l'absurde.

3. Considérer la fonction continue f_n définie par $f_n(t) = n^2 t / (n-1)$ pour $t \in \left[0; \frac{1}{n}\right]$ et constante sur $\left[\frac{1}{n}; 1\right]$.

Exercice 7 (**)

Soit X un ensemble et $E = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Soit L une forme linéaire sur E *positive*, c'est-à-dire

$$\forall f \in E \quad f \geq 0 \implies L(f) \geq 0$$

1. Montrer $\forall (f, g) \in E^2 \quad f \leq g \implies L(f) \leq L(g)$
2. En déduire que L est une application continue.
3. Montrer $L \neq 0 \iff L(1) \neq 0$
4. Établir $\forall (f, g) \in E^2 \quad L(fg)^2 \leq L(f^2)L(g^2)$

Indications : 1. Utiliser linéarité et positivité de L .

2. Encadrer f entre deux fonctions constantes.

4. Cloner la preuve habituelle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 8 (****)

L'ensemble $\mathcal{D}_n^s(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à valeurs propres simples est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer l'intérieur de $\mathcal{D}_n^s(\mathbb{C})$.

Indications : Pour $M \in \mathcal{D}_n^s(\mathbb{C})$ avec $\text{Sp}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, considérer $(M_p)_p \in (E \setminus \mathcal{D}_n^s(\mathbb{C}))^{\mathbb{N}}$ telle que $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} M$. Pour $\delta > 0$, montrer que $\text{Sp}(M_p) \cap D(\lambda_i, \delta) \neq \emptyset$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ à partir d'un certain rang. Avec un choix approprié de δ , obtenir une contradiction.

Exercice 9 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn. Montrer que les seules parties ouvertes et fermées de E sont $\emptyset$ et E lui-même.

Indications : Considérer A une partie ouverte et fermée non vide de E et différente de E puis pour $a \in A$ et $b \notin A$, étudier l'ensemble I défini par

$$I = \{t \in [0; 1] \mid \varphi(t) \in A\}$$

avec $\varphi(t) = a + t(b - a)$ pour t réel.