Séance 2 - MP+ - 21/11/25

Exercice 1 (Décomposition de Dunford ****)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ trigonalisable. Montrer qu'il existe un unique couple $(d, n) \in \mathscr{L}(\mathrm{E})^2$ tel que $u = d + n$ avec $d \circ n = n \circ d$ et d diagonalisable, n nilpotent. Établir également que d et u sont dans $\mathbb{K}[u]$.

Exercice 2 (Suites récurrentes linéaires ***)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(u_n)_n$ suite récurrente linéaire d'ordre p (entier non nul) vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \ldots + a_0 u_n$$

avec $a_0, \ldots, a_{p-1}$ des scalaires et $a_0 \neq 0$. On note $\mathrm{P} = \mathrm{X}^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k \mathrm{X}^k$ et on suppose P scindé dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ de la forme $\mathrm{P} = \prod_{i=1}^{r} (\mathrm{X} - \lambda_i)^{m_i}$ avec les λ_i deux à deux distincts et les m_i des entiers non nuls. On note $\sigma : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, (u_n)_n \mapsto (u_{n+1})_n$ et $\Delta = \sigma - \mathrm{id}$.

1. Justifier que $\sigma \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis interpréter $\mathrm{S_H}$ à l'aide de $\mathrm{P}(\sigma)$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et m entier non nul. On note $e_\lambda = (\lambda^n)_n$ et pour $u \in \mathrm{E}$, on note $u = e_\lambda y$ avec $y \in \mathrm{E}$. Enfin, pour k entier, on pose $r_k = (n^k)_n$ et $\mathrm{F}_k = \mathrm{Vect}\,(r_0, \ldots, r_k)$.
   (a) Justifier que y est bien définie puis établir
   $$u \in \mathrm{Ker}\,(\sigma - \lambda\,\mathrm{id})^m \iff y \in \mathrm{Ker}\ \Delta^m$$
   (b) Établir $$\mathrm{F}_{m-1} \subset \mathrm{Ker}\ \Delta^m$$
   (c) Conclure que l'inclusion précédente est une égalité.
3. En déduire que $(n \mapsto n^j \lambda_i^n, i \in [\![1 \,;\, r]\!], j \in [\![0 \,;\, m_i - 1]\!])$ est une base de $\mathrm{S_H}$.

Exercice 3 (Trigonalisation simultanée ***)

Soient A, B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent. Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables, c'est-à-dire qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ et $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$ sont triangulaires supérieures.

Exercice 4 (****)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$ et on pose $\Phi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} + \mathrm{MB}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Justifier que $\Phi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis montrer que les matrice A et B sont trigonalisables si et seulement si l'endomorphisme Φ l'est.

Exercice 5 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie égale à n entier non nul et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Pour $x \in \mathrm{E}$, on pose

$$\mathrm{E}_x = \mathrm{Vect}\left(u^k(x),\ k \in \mathbb{N}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_x = \{\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(u)(x) = 0_{\mathrm{E}}\}$$

L'endomorphisme u est dit *cyclique* s'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{E}_x = \mathrm{E}$. On définit le *commutant* de u noté $\mathscr{C}(u)$ par

$$\mathscr{C}(u) = \{v \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid u \circ v = v \circ u\}$$

1. Soit $x \in \mathrm{E}$. Justifier qu'il existe un polynôme unitaire $\pi_{u,x} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{I}_x = \pi_{u,x}\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et vérifiant $\pi_{u,x} | \pi_u$.
2. (a) On suppose $\pi_u = \mathrm{P}^\alpha$ avec $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ irréductible et α entier non nul. Établir qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $\pi_{u,x} = \pi$.
   (b) Généraliser le résultat précédent avec π_u quelconque. On pourra considérer sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
3. En déduire $$u \text{ cyclique} \iff \pi_u = \chi_u$$
4. On suppose u trigonalisable.
   (a) Établir $$\dim \mathscr{C}(u) \geqslant n$$
   (b) En déduire $$\pi_u = \chi_u \iff \mathbb{K}[u] = \mathscr{C}(u)$$

Exercice 6 (****)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathscr{S}(\mathrm{A})$ la classe de similitude de A, *i.e.*

$$\mathscr{S}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \quad | \quad \mathrm{M} \text{ semblable à } \mathrm{A}\}$$

1. Montrer que si A est inversible, alors $\overline{\mathscr{S}(\mathrm{A})} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer $$\mathrm{A} \text{ diagonalisable} \iff \mathscr{S}(\mathrm{A}) \text{ fermée}$$

Exercice 7 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn. Déterminer la nature topologique de

$$\Lambda = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^n \quad | \quad (x_1, \ldots, x_n) \text{ libre }\}$$

Exercice 8 (****)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continue surjective. Montrer que pour tout a réel, l'ensemble $f^{-1}(\{a\})$ n'est pas compact.

Indications

Exercice 1 (Décomposition de Dunford ****)

Indications : Pour l'existence d'un tel couple, utiliser un théorème de réduction du cours. Notant $\pi_u = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} (\mathrm{X}-\lambda)^{\alpha_\lambda}$, poser $\mathrm{F}_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})^{\alpha_\lambda}$ pour $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ et $(p_\lambda)_\lambda$ la famille de projecteurs associés à la somme directe $\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \mathrm{F}_\lambda$. Montrer que $p_\lambda \in \mathbb{K}[u]$ pour $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ puis conclure que d et n sont dans $\mathbb{K}[u]$. Pour l'unicité, considérer (d', n') un autre couple solution et justifier que d et d' commutent puis conclure.

Exercice 2 (Suites récurrentes linéaires ***)

Indications : 2.(a) Justifier que y peut s'exprimer à partir de u puis déterminer $(\sigma - \lambda\,\mathrm{id})^k(u)$ en fonction de y pour k entier.

2.(b) Pour k entier, observer $\Delta(\mathrm{F}_k) \subset \mathrm{F}_{k-1}$ puis généraliser pour $\Delta^\ell(\mathrm{F}_k)$ par récurrence.

2.(c) Montrer que $\Phi : \operatorname{Ker} \Delta^m \to \mathbb{K}^m, (u_n)_n \mapsto (u_0, \ldots, u_{m-1})$ est un isomorphisme.

3. Utiliser le lemme des noyaux puis faire la synthèse des résultats intermédiaires.

Exercice 3 (Trigonalisation simultanée ***)

Indications : Montrer que A et B possèdent un vecteur propre commun puis procéder par récurrence.

Exercice 4 (****)

Indications : Considérer $f(\mathrm{M}) = \mathrm{AM}$ et $g(\mathrm{M}) = \mathrm{MB}$ pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Observer que f et g commutent puis déterminer $\mathrm{P}(f)(\mathrm{M})$ et $g(f)(\mathrm{M})$ pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. En déduire que f et g sont simultanément trigonalisables (voir exercice de trigonalisation simultanée). Établir l'inclusion $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) + \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{B}) \subset \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(\Phi)$ en considérant $\mathrm{M} = \mathrm{XY}^\top$ avec X et Y des colonnes bien choisies dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ puis pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$ avec $\mathrm{M} \neq 0$, observer

$$\Phi(\mathrm{M}) = \alpha \mathrm{M} \iff \mathrm{AM} = \mathrm{MC}$$

avec C à préciser. En déduire $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) \cap \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{C}) \neq \varnothing$ et préciser $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(\Phi)$. Enfin, considérer Φ comme endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ puis comme endomorphisme de E et conclure que les $\lambda_i + \mu_j$ sont dans $\mathbb{K}$ avec λ_i, μ_j valeurs propres respectives de A et B puis enfin que les λ_i et μ_j sont dans $\mathbb{K}$.

Exercice 5 (****)

Indications : 1. Observer que pour $x \in \mathrm{E}$, le couple $(\mathrm{I}_x, +)$ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{K}[\mathrm{X}], +, \times)$.
2.(a) Considérer $x \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{P}^{\alpha-1}(u)(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$.
2.(b) Appliquer le résultat de la question 2.(a) à chaque u_i induit par u sur $\mathrm{E}_i = \mathrm{Ker}\ \mathrm{P}_i^{\alpha_i}(u)$ où $\prod_{i=1}^{r} \mathrm{P}_i^{\alpha_i}$ désigne la décomposition de π_u en facteurs irréductibles. En déduire la construction d'un vecteur $x \in \mathrm{E}$ adapté pour avoir $\pi_{u,x} = \pi_u$.
3. Pour $x \in \mathrm{E}$, établir $\dim \mathrm{E}_x = \deg \pi_{u,x}$.
4.(a) Pour $\mathrm{T} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure, considérer le système $\mathrm{TM} - \mathrm{MT} = 0$ et compter le nombre d'équations et d'inconnues. On pourra détailler les équations concernant les coefficients diagonaux du système.

Exercice 6 (****)

Indications : 1. Utiliser le déterminant.
2. Montrer que deux matrices semblables ont même polynôme minimal. Si A est diagonalisable, considérer $(\mathrm{B}_k)_k \in \mathscr{S}(\mathrm{A})^{\mathbb{N}}$ avec $\mathrm{B}_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \mathrm{B}$ puis déterminer $\pi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$. Comparer χ_{A} et χ_{B} et conclure. Si $\mathscr{S}(\mathrm{A})$ est fermée, considérer $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à A puis $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de trigonalisation de u et ensuite $\mathscr{B}_k = (\varepsilon_1, \varepsilon_2/k, \ldots, \varepsilon_n/k^{n-1})$ avec k entier non nul.

Exercice 7 (***)

Indications : Considérer une suite $(x^{(k)})_k$ à valeurs dans $\mathrm{E} \setminus \Lambda$ convergente de limite $x \in \mathrm{E}$, un n-uplet $\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \ldots, \lambda_n^{(k)}) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(k)} x_i^{(k)} = 0$ puis $\alpha^{(k)} = \dfrac{\lambda^{(k)}}{\|\lambda^{(k)}\|}$. A l'aide de cette suite $(\alpha^{(k)})_k$, établir que $x \in \mathrm{E} \setminus \Lambda$.

Exercice 8 (****)

Indications : Par l'absurde, supposer qu'il existe a réel tel que $f^{-1}(\{a\})$ est compact puis considérer $\mathrm{B}_{\mathrm{R}} = \mathrm{B}_f(0, \mathrm{R})$ qui contient $f^{-1}(\{a\})$ et étudier la connexité par arcs de $\mathrm{C}_{\mathrm{R}} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{B}_{\mathrm{R}}$. Considérer enfin des réels c et d dans $\mathbb{R} \setminus f(\mathrm{B}_{\mathrm{R}})$ tels que $c < a < d$ et aboutir à une contradiction.