

Feuille d'exercices n°22

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (*)

Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Corrigé : 1. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à I_3 donc égale à I_3 ce qui n'est pas le cas donc

La matrice A n'est pas diagonalisable.

2. La matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet 3 valeurs propres distinctes donc par condition suffisante

La matrice B est diagonalisable.

3. On a $\text{Sp}(C) = \{0, 1\}$ avec $m_0(C) = 1, m_1(C) = 2$

Puis
$$C - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{rg}(C - I_3) = 1$$

Le théorème du rang donne

$$\dim E_1(C) = \dim \text{Ker}(C - I_3) = 3 - \text{rg}(C - I_3) = 2 = m_1(C)$$

et $1 \leq \dim E_0(C) \leq m_0(C) = 1$

D'après le théorème fondamental de diagonalisation, on conclut

La matrice C est diagonalisable.

4. On a $\text{Sp}(D) = \{0, 1\}$ avec $m_0(D) = 2, m_1(D) = 1$

On a clairement $\text{rg } D = 2$ d'où $\dim E_0(D) = \dim \text{Ker } D = 1 \neq m_0(D)$. On conclut

La matrice D n'est pas diagonalisable.

Exercice 2 (*)

Les matrices suivantes sont-elles trigonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, préciser la matrice de passage de la base canonique vers une base de vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Corrigé : Avec successivement $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$, on a

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ -1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 0 & -1 & X-1 \end{vmatrix}$$

Ainsi

$$\chi_A = (X+1)X(X-2)$$

La matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet 3 valeurs propres distinctes donc est diagonalisable et *a fortiori* trigonalisable. On cherche ensuite des bases des sous-espaces propres. On a

$$AX = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = x(1, 0, -1)$$

$$(A + I_3)X = 0 \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = x(1, -1, 0)$$

$$(A - 2I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -2x + y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = x(1, 2, 3)$$

Ainsi

$$P^{-1}AP = \text{diag}(0, -1, 2) \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

En développant selon la première colonne,

$$\chi_B = \begin{vmatrix} X & 0 & -1 \\ -2 & X & -1 \\ 0 & -2 & X \end{vmatrix} = X(X^2 - 2) - 4 = X^3 - 2X - 4 = (X - 2)(X^2 + 2X + 2)$$

Le polynôme caractéristique χ_B n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ d'où

$$\boxed{\text{La matrice B n'est pas trigonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$$

On a

$$\chi_C = \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 0 \\ -2 & X-4 & 0 \\ 4 & -2 & X-5 \end{vmatrix} = (X-5)[(X-1)(X-4) - 4] = X(X-5)^2$$

$$\text{On a} \quad (C - 5I_3)X = 0 \iff 2x - y = 0 \iff (x, y, z) = x(1, 2, 0) + z(0, 0, 1)$$

On a $\dim E_5(C) = m_5(C)$ et $\dim E_0(C) = m_0(C)$ (car multiplicité égale à 1) avec χ_C scindé sur $\mathbb{R}$ ce qui prouve que la matrice C est diagonalisable. Puis

$$CX = 0 \iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -4x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = y(2, 1, 2)$$

Ainsi

$$P^{-1}CP = \text{diag}(5, 5, 0) \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Avec successivement $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient

$$\chi_D = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -1 & X-2 & 1 \\ 1 & -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & X-2 & -1 \\ 1 & -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & X-2 & -1 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix}$$

d'où

$$\chi_D = (X - 1)^2(X - 2)$$

On a $(D - I_3)X = 0 \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = x(1, 0, 1)$

On en déduit $\dim E_1(D) = 1 < 2 = m_1(D)$. Comme χ_D est scindé sur $\mathbb{R}$, on conclut

La matrice D est trigonalisable mais non diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (*)

Montrer que la matrice J de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de 1 est diagonalisable et préciser une matrice de passage associée.

Corrigé : Notons $E = \mathbb{R}^n$ et $U^\top = (1 \ \dots \ 1)$. On a clairement $\text{rg } J = 1$ et $\text{Im } J = \text{Vect}(U)$. Par suite, on a $0 \in \text{Sp}(J)$ et $\dim E_0(J) = n - 1$. Puis $JU = nU$ donc $n \in \text{Sp}(J)$. Or, comme $E_0(J)$ et $E_n(J)$ sont en somme directe, on a

$$\dim E \geq \dim E_0(J) \oplus E_n(J) = \dim E_0(J) + \dim E_n(J) \geq n - 1 + 1 = n = \dim E$$

Par suite

$$E_0(J) \oplus E_n(J) = E$$

Ainsi

La matrice J est diagonalisable.

Clairement, la famille (U) est une base de la droite vectorielle $E_n(J)$. Puis

$$X \in \text{Ker } J \iff \sum_{i=1}^n x_i = 0 \iff x_1 = -\sum_{i=2}^n x_i$$

Ainsi

La famille $(-e_1 + e_i)_{i \in \llbracket 2; n \rrbracket}$ est une base de $\text{Ker } J$.

Par suite, une matrice de passage pour diagonaliser J est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} -1 & \dots & \dots & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Variantes : (a) On a (voir exemple du cours de Réduction)

$$\chi_J = (X - n)X^{n-1}$$

Par suite

$$m_n(A) = \dim E_n(A) \quad \text{et} \quad m_0(A) = \dim E_0(A)$$

et χ_J scindé dans $\mathbb{R}[X]$. On conclut que J est diagonalisable.

(b) Le calcul donne $J^2 = nJ$ donc $P = X(X - n)$ est annulateur de J et P scindé à racines simples donc J est diagonalisable.

Exercice 4 (**)

Soit $n \geq 2$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg}(A) = 1$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
2. Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices diagonalisables ?

Corrigé : 1. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé. Dans une base obtenue par complétion de $\text{Ker } u$, on a $\text{mat}_{\mathcal{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} 0_{n-1} & * \\ \hline 0 & \alpha \end{array} \right)$ avec $\alpha = \text{Tr}(u) = \text{Tr}(A)$. Si $\text{Tr}(A) = 0$, alors $\text{Sp}(A) = \{0\}$ et A n'est pas nulle donc pas semblable à la matrice nulle donc pas diagonalisable (ou aussi $m_0(A) = n > n-1 = \dim E_0(A)$). Si $\text{Tr}(A) \neq 0$, on a

$$\dim E_0(A) = n-1 \quad \text{et} \quad \dim E_{\text{Tr}(A)}(A) \geq 1 \quad \implies \quad \mathbb{K}^n = E_0(A) \oplus E_{\text{Tr}(A)}(A)$$

ou aussi

$$m_{\text{Tr}(A)}(A) = 1 = \dim E_{\text{Tr}(A)}(A) \quad m_0(A) = n-1 = \dim E_0(A) \quad \text{et} \quad \chi_A \text{ scindé sur } \mathbb{K}[X]$$

Ainsi

$$\boxed{A \text{ diagonalisable} \iff \text{Tr}(A) \neq 0}$$

Remarque : On a $X^{n-1} |_{\chi_A}$ d'où $\chi_A = X^{n-1}(X - \text{Tr}(A))$. On peut conclure comme précédemment.

Variante : Il existe une colonne X de A non nulle. Toutes les autres colonnes sont colinéaires à celle-ci d'où $A = XY^T$ avec $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a $A = (x_i y_j)$. Puis $A^2 = X(Y^T X)Y^T = \text{Tr}(A)A$. Ainsi, le polynôme $P = X^2 - \text{Tr}(A)X$ est annulateur de A . Comme A n'est pas une homothétie, on en déduit que $\pi_A = X(X - \text{Tr}(A))$. La matrice A est diagonalisable si et seulement si π_A est scindé à racines simples d'où

$$\boxed{A \text{ diagonalisable} \iff \text{Tr}(A) \neq 0}$$

2. La famille $\mathcal{L} = (E_{i,j} + E_{j,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est constituée de matrices de rang 1 de trace non nulle, est génératrice et de cardinal égal à n^2 . En effet, notant $F = \text{Vect}(\mathcal{L})$, on a

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad E_{j,j} = \frac{1}{2} 2E_{j,j} \in F \quad \text{et} \quad E_{i,j} = (E_{i,j} + E_{j,j}) - E_{j,j} \in F$$

ce qui prouve $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \subset F$ et $F \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'où l'égalité. D'après le résultat de la question précédente, on conclut

$$\boxed{\text{Il existe une base de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ formée de matrices diagonalisables.}}$$

Exercice 5 (**)

Soit $n \geq 2$. Diagonaliser la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ ou } j = 1 \text{ ou } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Corrigé : On a

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & X-1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & X-1 \end{vmatrix}$$

On réalise l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{X-1} \sum_{k=2}^n L_k$ et on obtient

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} X-1-\frac{n-1}{X-1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & X-1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & X-1 \end{vmatrix} \\ &= \left(X-1-\frac{n-1}{X-1} \right) (X-1)^{n-1} = (X^2 - 2X - n + 2)(X-1)^{n-2} \end{aligned}$$

Ainsi, on a χ_A scindé dans $\mathbb{R}[X]$ avec $m_{1 \pm \sqrt{n-1}}(A) = 1$ et $m_1(A) = n-2$. Or, on observe

$$\text{rg}(A - I_n) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = 2$$

et d'après le théorème du rang, il s'ensuit $m_1(A) = \dim E_1(A)$. On conclut

$$\boxed{\chi_A = (X-1)^{n-2}(X^2 - 2X - n + 2) \quad \text{et} \quad A \text{ semblable à } \text{diag}(1 + \sqrt{n-1}, 1 - \sqrt{n-1}, I_{n-2})}$$

Variantes : (a) Notant $P_n = \chi_A$, on peut aussi développer sur la dernière colonne

$$P_n = (X-1)P_{n-1} + (-1)^n \begin{vmatrix} -1 & X-1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & X-1 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix} = (X-1)P_{n-1} - (X-1)^{n-2}$$

Par récurrence, on peut déterminer l'expression de P_n ou aussi observer la suite arithmétique

$$\frac{P_n}{(X-1)^n} - \frac{P_{n-1}}{(X-1)^{n-1}} = \frac{1}{(X-1)^2} \implies \frac{P_n}{(X-1)^n} = \frac{P_1}{X-1} - \frac{n-1}{(X-1)^2}$$

On en déduit P_n .

(b) On pose $A = B + I_n$ et on a $\text{Im } B = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ avec $\varepsilon_1 = \sum_{k=2}^n e_k$ et $\varepsilon_2 = e_1$. On peut alors

montrer que B est semblable à une matrice par blocs $\left(\begin{array}{c|c} B' & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ avec $B' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Remarque : On peut préciser une base de vecteurs propres. On a

$$AX = X \iff x_1 = 0, \sum_{i=2}^n x_i = 0 \iff X = \sum_{i=3}^n -x_i(e_2 - e_i)$$

d'où une base de $E_1(A)$. Puis, pour $\lambda \neq 1$, il vient

$$\begin{aligned}
AX = \lambda X &\iff \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = \lambda x_1 \\ \forall i \in \llbracket 2; n \rrbracket & x_1 + x_i = \lambda x_i \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -(\lambda - 1)x_1 + \sum_{i=2}^n \frac{x_1}{\lambda - 1} = \lambda x_1 \\ \forall i \in \llbracket 2; n \rrbracket & x_i = \frac{x_1}{\lambda - 1} \end{cases} \\
AX = \lambda X &\iff \begin{cases} x_1(\lambda^2 - 2\lambda - n + 2) = 0 \\ \forall i \in \llbracket 2; n \rrbracket & x_i = \frac{x_1}{\lambda - 1} \end{cases}
\end{aligned}$$

Pour $\lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{1\}$, les vecteurs de la forme $(\lambda - 1, 1, \dots, 1)$ constituent des bases de $E_\lambda(A)$. Notant λ_1, λ_2 les valeurs propres de A différentes de 1 et

$$P = \text{mat}_{\mathcal{E}} \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 & \lambda_2 - 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a

$$\boxed{P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 1, \dots, 1)}$$

Exercice 6 (*)

L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est-il convexe ? est-il un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

Corrigé : On peut observer en premier lieu que sev implique convexe. On va donc essayer de procéder dans cet ordre. On traite le cas $n = 2$, le cas général s'en déduit en considérant des matrices blocs dont le bloc 2×2 en haut à gauche sera celui considéré avant. Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, les matrices A et B sont diagonalisables par condition suffisante mais $A + B$ ne l'est pas sans quoi elle serait semblable à I_2 donc égale à I_2 . Pour les mêmes raisons, la matrice $\frac{A+B}{2}$ qui est combinaison convexe de A et B n'est pas diagonalisable. On conclut

L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est ni un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ni convexe.

Exercice 7 (*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A^n = I_n$ et $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ libre. Montrer que A est diagonalisable puis préciser $\text{Sp}(A)$.

Corrigé : Le polynôme $X^n - 1$ est annulateur de A d'où $\pi_A | X^n - 1$. Si $\deg \pi_A < n$, alors la relation $\pi_A(A) = 0$ contredit la liberté de la famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$. On en déduit $\deg \pi_A \geq n$ et par conséquent les polynômes π_A et $X^n - 1$ sont associés unitaires donc égaux. Enfin, en observant

$$\pi_A = X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)$$

qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, on conclut

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable avec } \text{Sp}(A) = \mathbb{U}_n.}$$

Exercice 8 (**)

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Résoudre en $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $M^2 + M = A$.

Corrigé : On a $\chi_A = \begin{vmatrix} X-5 & -3 \\ -1 & X-3 \end{vmatrix} = X^2 - 8X + 12 = (X-2)(X-6)$

Par condition suffisante, la matrice A est diagonalisable. On a

$$(x, y) \in E_2(A) \iff (A - 2I_2)X = 0 \iff x + y = 0 \iff (x, y) = x(1, -1)$$

et
$$(x, y) \in E_6(A) \iff (A - 6I_2)X = 0 \iff (x, y) = y(3, 1)$$

Ainsi
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, notant $M = PXP^{-1}$ avec $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a

$$M^2 + M = A \iff PD^2P^{-1} + PDP^{-1} = PDP^{-1} \iff X^2 + X = D$$

On remarque
$$XD = X^3 + X^2 = DX$$

Posant $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on trouve

$$XD - DX = \begin{pmatrix} 0 & 4b \\ -4c & 0 \end{pmatrix} = 0 \iff (b, c) = 0$$

Ainsi $X^2 + X = D \iff \begin{cases} a^2 + a = 2 \\ d^2 + d = 6 \end{cases} \iff (a, d) \in \{(1, 2), (-2, 2), (1, -3), (-2, -3)\}$

Enfin après calcul des matrices $M = PDP^{-1}$, on conclut

$$\boxed{\text{Les solutions sont } \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -11 & -3 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}.}$$

Remarque : On a vu que X et D commutent et par conséquent, la matrice X est diagonale. C'est un fait plus général : pour f et g dans $\mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, si f et g commutent et f diagonalisable à valeurs propres simples, alors $g \in \mathbb{K}[f]$ et donc g est en particulier diagonalisable pour le même changement de base que f . Le lecteur curieux pourra se référer à l'exercice 0 de la feuille 0.

Exercice 9 (*)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \in E$ avec $\text{Tr}(A) \neq 0$. On pose

$$\forall M \in E \quad \varphi(M) = \text{Tr}(M)A - \text{Tr}(A)M$$

1. Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que φ est diagonalisable puis calculer $\text{Tr}(\varphi)$ et $\det(\varphi)$.

Corrigé : 1. On a φ à valeurs dans E et φ linéaire par bilinéarité du produit et de la trace d'où

$$\varphi \in \mathcal{L}(E)$$

2. Soit $M \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(M) = \lambda M$. On a

$$\varphi(M) = \lambda M \iff \text{Tr}(M)A = (\lambda + \text{Tr } A)M$$

Si $\lambda = -\text{Tr } A$, on trouve $\varphi(M) = \lambda M \iff M \in \text{Ker } \text{Tr}$

ce qui prouve $-\text{Tr } A \in \text{Sp}(\varphi)$ et $E_{-\text{Tr } A}(\varphi) = \text{Ker } \text{Tr}$. Si $\lambda \neq -\text{Tr } A$, on a $M \in \text{Vect}(A)$ autrement dit $E_\lambda \subset \text{Vect}(A)$. On trouve $\varphi(A) = 0$ d'où $\text{Vect}(A) \subset E_0(\varphi)$ et comme $0 \neq -\text{Tr } A$, on a $E_0(\varphi) \subset \text{Vect}(A)$. Ainsi

$$\text{Sp}(\varphi) = \{0, -\text{Tr } A\} \quad \text{et} \quad E_0(\varphi) = \text{Vect}(A) \quad \text{et} \quad E_{-\text{Tr } A}(\varphi) = \text{Ker } \text{Tr}$$

On a $\dim E_0(\varphi) + \dim E_{-\text{Tr } A}(\varphi) = \dim E$ ce qui prouve la diagonalisabilité de φ et dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à $E = E_0(\varphi) \oplus E_{-\text{Tr } A}(\varphi)$, on a $\text{mat}_{\mathcal{B}}\varphi = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & -\text{Tr}(A)I_{n^2-1} \end{array} \right)$. On conclut

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable et } \det \varphi = 0, \text{Tr } \varphi = -(n^2 - 1) \text{Tr}(A).}$$

Exercice 10 (*)

Les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes sont-elles semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Corrigé : On trouve $\chi_A = \chi_B = (X - 1)(X - 2)^2$

Clairement $\text{rg}(A - 2I_3) = 1 \implies \dim E_2(A) = 2 = m_2(A)$

Donc la matrice A est diagonalisable. Ensuite

$$B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Les deux premières colonnes étant échelonnées non nulles, on a $\text{rg}(B - 2I_3) \geq 2$ (donc égal à 2) et par suite, la matrice B n'est pas diagonalisable et on conclut que

$$\boxed{\text{Les matrices } A \text{ et } B \text{ ne sont pas semblables.}}$$

Exercice 11 (**)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On suppose A inversible. Montrer l'équivalence

$$A \text{ triangulaire supérieure} \iff \forall k \geq 2 \quad A^k \text{ triangulaire supérieure}$$

2. L'équivalence précédente a-t-elle lieu sans l'hypothèse d'inversibilité de A ?

Corrigé : 1. Le sens direct est immédiat. On note $\chi_A = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. En particulier, on a $a_0 = (-1)^n \det(A) \neq 0$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, il vient

$$\chi_A(A) = 0 \iff I_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_k A^k$$

d'où en multipliant par A
$$A = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1} A^k$$

ce qui prouve que la matrice A est triangulaire supérieure. On a donc établi

$$A \text{ triangulaire supérieure} \iff \forall k \geq 2 \quad A^k \text{ triangulaire supérieure}$$

Remarque : On peut faire sans réduction (ce qui rend l'exercice d'un intérêt discutable ...) en observant :

$$A = A^3(A^2)^{-1}$$

La matrice A^2 est inversible, triangulaire supérieure donc son inverse l'est aussi. Il s'ensuit que la matrice A est produit de matrices triangulaires supérieures d'où le résultat.

2. On choisit $A = \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a $A^k = 0$ pour tout $k \geq 2$ et A non triangulaire donc le résultat n'a pas lieu sans hypothèse d'inversibilité.

Exercice 12 (**)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = I_n - A$.

Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ puis établir $\det(A) > 0$.

Corrigé : Le polynôme $P = X^3 + X - 1$ est annulateur de A . On a $x \mapsto P(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $P'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ pour tout x réel et $P(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$, $P(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi, la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et admet donc une unique racine réelle α qui est racine simple puisque $P'(\alpha) > 0$. Ainsi, dans $\mathbb{C}[X]$, on obtient $P = (X - \alpha)(X - \omega)(X - \bar{\omega})$ avec $\omega, \bar{\omega}$ les racines complexes conjuguées de P . Comme P est annulateur de A , scindé à racines simples, on conclut

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

Comme $P(0) = -1$, il s'ensuit que $\alpha > 0$. Par ailleurs, on a $m_\omega(A) = m_{\bar{\omega}}(A)$ puisque, soit χ_A n'admet pas de racines complexes ce qui implique $m_\omega(A) = m_{\bar{\omega}}(A) = 0$, soit il en admet et dans ce cas, une racine complexe et son conjugué sont racines de même multiplicité puisque $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$. Ainsi, par trigonalisation de A , il vient

$$\det A = \alpha^{m_\alpha(A)} |\omega|^{2m_\omega(A)}$$

On conclut

$$\boxed{\det(A) > 0}$$

Exercice 13 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\exists x \in E \mid (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ base de E ;

2. les valeurs de propres de f sont simples ;

3. $(\text{id}, f, \dots, f^{n-1})$ base de $\mathbb{K}[f]$.

Corrigé : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de f associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Soit $x \in E$ avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Comme $P(f)(e_i) = P(\lambda_i)e_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f^k(x) = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i^k e_i$$

Notons $\mathcal{L}_x = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$. On a

$$\det(\text{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{L}_x) = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \lambda_1 & \dots & x_1 \lambda_1^{n-1} \\ x_2 & x_2 \lambda_2 & \dots & x_2 \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n \lambda_n & \dots & x_n \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Par linéarité sur chaque ligne, on peut factoriser $\prod_{i=1}^n x_i$ et on trouve

$$\det(\text{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{L}_x) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \right)$$

Supposons (1). Ainsi, il existe $x \in E$ tel que

$$\det(\text{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{L}_x) \neq 0 \iff \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \right) \neq 0$$

Le produit résultant du déterminant de Vandermonde étant non nul, il s'ensuit clairement que les λ_i sont deux à deux distincts ce qui prouve (2). Supposons ensuite (2). Il suffit de choisir $x \in E$ tel que $\det \text{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{L}_x \neq 0$. Le choix $x = \sum_{i=1}^n e_i$ convient clairement puisqu'on a

$$\det(\text{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{L}_x) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$

ce qui caractérise que la famille $\mathcal{L}_x$ est une base de E . Comme f est diagonalisable, on a π_f scindé à racines simples avec $\pi_f = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (X - \lambda)$ et par conséquent

$$\text{les valeurs propres de } f \text{ sont simples} \iff \deg \pi_f = n$$

La famille $(\text{id}, f, \dots, f^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[f]$ avec $d = \deg \pi_f$ et on en déduit que (3) équivaut à $\deg \pi_f = n$ d'où

$$\boxed{\text{Les assertions (1), (2) et (3) sont équivalentes.}}$$

Exercice 14 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et u, v dans $\mathcal{L}(E)$, diagonalisables et tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer qu'il existe une base de diagonalisation pour u et v .

Corrigé : On a $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. Pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$, comme u et v commutent, alors $E_\lambda(u)$ est stable par v . Notons v_λ l'endomorphisme induit par v sur $E_\lambda(u)$. On a v_λ diagonalisable car induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable. Ainsi, on peut trouver

$\mathcal{B}_\lambda$ une base de $E_\lambda(u)$ qui soit base de diagonalisation de v_λ . Mais cette base est également constituée de vecteurs propres de u (associés à λ). Ainsi, en concaténant $\mathcal{B} = \biguplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \mathcal{B}_\lambda$, on obtient une base de diagonalisation simultanée de u et v et on conclut

Il existe une base de diagonalisation pour u et v .
