ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

# Feuille d'exercices n°23

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## Exercice 1 (**)

Les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes sont-elles semblables :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

**Corrigé :** On trouve
$$\chi_{\mathrm{A}} = \chi_{\mathrm{B}} = \mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}^2 + 1$$

Posons $f(t) = t^3 - 3t^2 + 1$ pour $t$ réel. Par dérivation, il vient
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f'(t) = 3t(t-2) \quad \text{et} \quad f(0) = 1 > 0 \qquad f(2) = -3 < 0$$

Une étude de variations prouve alors que $f$ admet 3 racines réelles distinctes. Ainsi, les polynômes $\chi_{\mathrm{A}}$ et $\chi_{\mathrm{B}}$ sont scindés à racines simples donc A et B sont diagonalisables semblables à la même matrice diagonale d'où

$$\boxed{\text{Les matrices A et B sont semblables.}}$$

## Exercice 2 (**)

Soit A matrice compagne de $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ suite récurrente linéaire d'ordre $p \geqslant 2$. Résoudre $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$ avec $\mathrm{X}^\top = \begin{pmatrix} x_0 & \ldots x_{p-1} \end{pmatrix}$ non nulle. En déduire la forme des sous-espaces propres de A et une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de A.

**Corrigé :** On a
$$u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \ldots + a_0 u_n$$

avec $a_i$ des scalaires et $a_0 \neq 0$. On rappelle

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{X}_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ a_0 & \ldots & \ldots & \ldots & a_{p-1} \end{pmatrix}}_{=\mathrm{A}} \times \mathrm{X}_n = \mathrm{AX}_n$$

On note $\mathrm{P} = \mathrm{X}^p - \sum\limits_{i=0}^{p-1} a_i \mathrm{X}^i$. On a

$$\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X} \iff \begin{cases} x_1 = \lambda x_0 \\ \vdots \\ x_{p-1} = \lambda x_{p-2} \\ a_0 x_0 + \ldots a_{p-1}x_{p-1} = \lambda x_{p-1} \end{cases} \iff \begin{cases} (x_0, \ldots, x_{p-1}) = x_0(1, \lambda, \ldots, \lambda^{p-1}) \\ x_0 \mathrm{P}(\lambda) = 0 \end{cases}$$

On remarque en particulier que $\mathrm{X} \neq 0 \iff x_0 \neq 0$. La dernière équation indique donc $\lambda$ racine de P. Par ailleurs, les sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Si la matrice A est diagonalisable, alors on a $\dim \mathbb{K}^p = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) = \mathrm{Card}\ \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$ ce qui prouve que A admet $p$ valeurs propres distinctes et la réciproque étant immédiate, on conclut

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \qquad \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}\,(1, \lambda, \ldots, \lambda^{p-1}) \\ \text{A diagonalisable} \iff \text{A admet } p \text{ valeurs propres distinctes.} \end{array}}$$

## Exercice 3 (***)

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

1. Interpréter A comme matrice d'un endomorphisme de $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. En déduire que A est diagonalisable.

**Corrigé :** 1. On décompose

$$\mathrm{A} = \mathrm{U} + \mathrm{V} \quad \text{avec} \quad \mathrm{V} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ n & \ddots & & & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

On note $u$ et $v$ endomorphismes de E tels que $\mathrm{U} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} u$ et $\mathrm{V} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} v$ avec $\mathcal{C} = (1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$. On a avec évaluation paresseuse pour rester à valeurs dans E

$$\forall k \in [\![ 0\,;\, n ]\!] \qquad u(\mathrm{X}^k) = k\mathrm{X}^{k-1} \quad \text{et} \quad v(\mathrm{X}^k) = (n-k)\mathrm{X}^{k+1} = n\mathrm{X} \cdot \mathrm{X}^k - \mathrm{X}^2 \times k\mathrm{X}^{k-1}$$

Par combinaison linéaire, il s'ensuit

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad u(\mathrm{P}) = \mathrm{P}' \quad \text{et} \quad g(\mathrm{P}) = n\mathrm{X}\mathrm{P} - \mathrm{X}^2\mathrm{P}'$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} \varphi \quad \text{avec} \quad \forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{P}) = (1 - \mathrm{X}^2)\mathrm{P}' + n\mathrm{X}\mathrm{P}}$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$. On a

$$\varphi(\mathrm{P}) = \lambda \mathrm{P} \iff (1 - \mathrm{X}^2)\mathrm{P}' + (n\mathrm{X} - \lambda)\mathrm{P} = 0$$

Considérons l'équation différentielle homogène associée sur $\mathrm{I} = ]\,1\,;+\infty\,[$

$$(1 - t^2)x' + (nt - \lambda)x = 0 \tag{H}$$

L'ensemble des solutions est $\mathrm{S_H} = \mathrm{Vect}\,(f)$ avec $f : t \mapsto \exp\left(\int^t \frac{ns - \lambda}{s^2 - 1}\,\mathrm{d}s\right)$. Par décomposition en éléments simples, on trouve

$$\int^t \frac{ns - \lambda}{s^2 - 1}\,\mathrm{d}s = \int^t \left[\frac{\alpha}{s-1} + \frac{\beta}{s+1}\right] \mathrm{d}s \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{n - \lambda}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\lambda + n}{2}$$

D'où $$f = t \in \mathrm{I} \mapsto (t-1)^\alpha (1+t)^\beta$$

On cherche des solutions polynomiales. Notons $\alpha = k$ entier, on a $\lambda = n - 2k$ et $\beta = n - k$. On veut $\beta$ entier également d'où, notant $\mathrm{P}_k = (\mathrm{X} - 1)^k (\mathrm{X} + 1)^{n-k}$ pour $k \in [\![ 0\,;\, n ]\!]$

$$\forall k \in [\![ 0\,;\,n ]\!] \qquad (1-X^2)P_k' + (nX - n + 2k)P_k = 0 \iff \varphi(P_k) = (n-2k)P_k$$

Les $P_k$ ne sont pas nuls (de degré égal à $n$) donc sont vecteurs propres, associés à des valeurs propres distinctes ($k \mapsto n-2k$ injective) et constituent par conséquent une famille libre de cardinal égal à $\dim E$ donc une base de diagonalisation de $\varphi$. Ainsi

$$\boxed{\text{La matrice A est diagonalisable.}}$$

## Exercice 4 (****)

On pose

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad P_n = \chi_{A_n}$$

1. En considérant $P_n(2\cos(\theta))$ avec $\theta \in ]\,0\,;\pi\,[$, déterminer une expression factorisée de $P_n$.
2. En déduire que $A_n$ est diagonalisable et préciser ses éléments propres

**Corrigé :** 1. Soit $\theta \in ]\,0\,;\pi\,[$. En développant sur la première ligne, on trouve pour $n \geqslant 3$

$$P_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)P_{n-1}(2\cos(\theta)) - P_{n-2}(2\cos(\theta))$$

Ainsi, la suite $(P_n(2\cos\theta))_{n\geqslant 1}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$r^2 - 2\cos(\theta)r + 1 = 0$$

Les racines $e^{\pm i\theta}$ sont complexes conjuguées d'où l'existence de réels $\lambda$, $\mu$ tels que

$$\forall n \geqslant 1 \qquad P_n(2\cos(\theta)) = \lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)$$

On a $P_0(2\cos(\theta)) = 1$ et $P_1(2\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)$. Puis, on trouve

$$\begin{cases} P_0(2\cos(\theta)) = \lambda = 1 \\ P_1(2\cos(\theta)) = \lambda\cos(\theta) + \mu\sin(\theta) = 2\cos(\theta) \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \end{cases}$$

Ainsi, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P_n(2\cos(\theta)) = \frac{\sin(\theta)\cos(n\theta) + \sin(n\theta)\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

Soit $n$ entier non nul. On a

$$P_n(2\cos(\theta)) = 0 \iff \sin((n+1)\theta) = 0 \iff \theta \in \left\{\frac{k\pi}{n+1}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

La fonction $\theta \mapsto \cos(\theta)$ étant injective sur $]\,0\,;\pi\,[$, on a

$$\operatorname{Card}\left\{\frac{k\pi}{n+1}, k \in [\![ 1\,;\,n ]\!]\right\} = \operatorname{Card}\left\{\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), k \in [\![ 1\,;\,n ]\!]\right\}$$

Comme $P_n$ est unitaire de degré $n$ et qu'on vient d'exhiber $n$ racines distinctes, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(X - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)}$$

**Remarque :** La suite $(P_n(2\cos(\theta)))_n$ est la suite des polynômes de Tchebychev de seconde espèce.

2. Soit $n$ entier non nul. La matrice $\mathrm{A}_n$ admet $n$ valeurs propres distinctes donc est diagonalisable par condition suffisante. Notons

$$\forall k \in [\![ 1 \,;\, n ]\!] \qquad \theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$$

On a

$$(\mathrm{A}_n - 2\cos(\theta_k)\mathrm{I}_n)\mathrm{X} = 0 \iff \forall \ell \in [\![ 1 \,;\, n ]\!] \qquad x_{\ell-1} - 2\cos(\theta_k)x_\ell + x_{\ell+1} = 0 \quad \text{avec} \quad x_0 = x_{n+1} = 0$$

La suite $(x_\ell)_{\ell \in [\![ 0\,;\, n+1 ]\!]}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 et comme à la première question, on obtient l'existence de $\alpha$, $\beta$ réels tels que

$$\forall \ell \in [\![ 0 \,;\, n+1 ]\!] \qquad x_\ell = \alpha\cos(\ell\theta_k) + \beta\sin(\ell\theta_k)$$

La condition $x_0 = 0$ fournit $\alpha = 0$ et on obtient

$$\forall \ell \in [\![ 1 \,;\, n ]\!] \qquad x_\ell = \beta \sin\left(\frac{\ell k \pi}{n+1}\right)$$

On conclut

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La matrice } \mathrm{A}_n \text{ est diagonalisable avec } \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}_n) = \left\{\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right), k \in [\![ 1 \,;\, n ]\!]\right\} \\ \text{et } \mathrm{E}_{2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}(\mathrm{A}_n) = \mathrm{Vect}\left(\sin\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right), \ldots, \sin\left(\dfrac{nk\pi}{n+1}\right)\right) \text{ pour } k \in [\![ 1 \,;\, n ]\!].\end{array}}$$

**Remarque :** On peut invoquer le théorème spectral pour la diagonalisabilité de la matrice symétrique réelle $\mathrm{A}_n$.

## Exercice 5 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ et on pose $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$.

1. Justifier que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Montrer $\qquad \mathrm{A}$ diagonalisable $\iff$ $\varphi$ diagonalisable

**Corrigé :** 1. On a $\varphi$ à valeurs dans E et linéaire par linéarité du produit matriciel. Ainsi

$$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

2. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Par récurrence immédiate, on a $\varphi^k(\mathrm{M}) = \mathrm{A}^k\mathrm{M}$ pour tout $k$ entier et par conséquent, par combinaison linéaire

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{P}(\varphi)(\mathrm{M}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{M}$$

Par suite $\qquad \mathrm{P}$ annulateur de $\varphi \iff \mathrm{P}$ annulateur de A

On en déduit que $\pi_\varphi = \pi_\mathrm{A}$ et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{A} \text{ diagonalisable} \iff \varphi \text{ diagonalisable}}$$

## Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux. Montrer qu'il existe une base commune de diagonalisation.

**Corrigé :** Soit $(u_{i_1},\dots,u_{i_p})$ famille génératrice de $\mathrm{Vect}\,(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$, sev de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ de dimension finie. Par souci de simplification, on la note abusivement $(u_1,\dots,u_p)$. On procède ensuite par récurrence sur $p$. L'initialisation pour $p=1$ est immédiate. On suppose la propriété vraie au rang $p-1$ entier non nul. On décompose $\mathrm{E}=\bigoplus\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u_p)}\mathrm{E}_\lambda(u_p)$ puis on considère les $u_{i,\lambda}$ induit par $u_i$ sur $\mathrm{E}_\lambda(u_p)$ pour $\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u_p)$ et $i\in[\![\,1\,;\,p-1\,]\!]$. La famille $(u_{i,\lambda})_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ vérifie l'hypothèse de récurrence et par conséquent, il existe $\mathscr{B}_\lambda$ base de diagonalisation commune à tous les $u_{i,\lambda}$ et également à l'endomorphisme induit par $u_p$ sur $\mathrm{E}_\lambda(u_p)$. La base concaténée $\biguplus\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u_p)}\mathscr{B}_\lambda$ est alors une base de diagonalisation simultanée. Ainsi

$$\boxed{\text{Il existe une base commune de diagonalisation pour une famille d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux.}}$$

## Exercice 7 (**)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $u,v$ dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ diagonalisables tels que $u^3=v^3$. Montrer que $u=v$.

**Corrigé :** Avec $\mathrm{P}=\sum\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u^3)}\sqrt[3]{\lambda}\,\mathrm{L}_\lambda$ où $(\mathrm{L}_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u^3)}$ désigne la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associée à $\mathrm{Sp}\,(u^3)$. On a donc

$$\forall\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u^3)\qquad \mathrm{P}(\lambda)=\sqrt[3]{\lambda}$$

Dans $\mathscr{B}$ une base de diagonalisation de $u$, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}u^3=\mathrm{diag}_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)}(\lambda^3\mathrm{I}_{m_\lambda})$ puis

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\mathrm{P}(u^3)=\mathrm{diag}_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)}(\lambda\mathrm{I}_{m_\lambda})=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}u$$

d'où $u=\mathrm{P}(u^3)$. De même $v=\mathrm{P}(v^3)$ et comme $u^3=v^3$, on conclut

$$\boxed{u=v}$$

## Exercice 8 (****)

Soit $u\in\mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que $u$ est non diagonalisable si et seulement s'il existe un plan vectoriel F stable par $u$ et $\mathscr{B}$ une base de F tels que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}u_{\mathrm{F}}=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$.

**Corrigé :** Supposons $u$ non diagonalisable. On a $\pi_u$ scindé mais pas à racines simples d'où l'existence de $\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)$ de multiplicité $\alpha\geqslant 2$ dans $\pi_u$. On note $\pi_u=(\mathrm{X}-\lambda)^\alpha\mathrm{Q}$, $\mathrm{H}=\mathrm{Ker}\,(u-\lambda\,\mathrm{id}\,)^\alpha$ et $v=u_{\mathrm{H}}$. On a $\mathrm{Ker}\,(v-\lambda\,\mathrm{id}\,)^{\alpha-1}\subset\mathrm{Ker}\,(v-\lambda\,\mathrm{id}\,)^\alpha=\mathrm{H}$ et cette inclusion est stricte sans quoi on aurait $\mathrm{H}=\mathrm{Ker}\,(v-\lambda\,\mathrm{id}\,)^{\alpha-1}$ d'où $(\mathrm{X}-\lambda)^{\alpha-1}$ annulateur de $v$ puis $(\mathrm{X}-\lambda)^{\alpha-1}\mathrm{Q}$ annulateur de $u$ (puisque $\mathrm{E}=\mathrm{H}\oplus\mathrm{Ker}\,\mathrm{Q}(u)$ d'après le lemme des noyaux) ce qui contredit la minimalité de $\pi_u$. On prend $a\in\mathrm{H}\setminus\mathrm{Ker}\,(v-\lambda\,\mathrm{id}\,)^{\alpha-1}$, $y=(v-\lambda\,\mathrm{id}\,)^{\alpha-2}(a)$ et $x=(v-\lambda\,\mathrm{id}\,)^{\alpha-1}(a)$. Par choix de $a$, on a $y$ et $x$ non nuls puis $v(x)=\lambda x$ et $v(y)=x+\lambda y$. Soit $(\gamma,\delta)\in\mathbb{C}^2$ tel que $\gamma x+\delta y=0$. Il vient

$$(v-\lambda\,\mathrm{id}\,)(\gamma x+\delta y)=\delta x=0$$

On en déduit $\delta = 0$ puis $\gamma = 0$. Ainsi, le sev $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(x, y)$ est un plan stable par $v$ donc par $u$ et notant $\mathscr{B} = (x, y)$, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u_{\mathrm{F}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Réciproquement, si $u$ était diagonalisable, alors pour F stable, on aurait $u_{\mathrm{F}}$ diagonalisable puis $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u_{\mathrm{F}}$ semblable à $\lambda \mathrm{I}_2$ donc égale à cette matrice ce qui est faux. On conclut

$$\boxed{u \text{ non diagonalisable} \iff \text{il existe F plan stable et } \mathscr{B} \text{ base de F tels que } \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u_{\mathrm{F}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}$$

## Exercice 9 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $u, v$ dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec $u \circ v = v \circ u$ et $v$ nilpotent. Montrer que $\det(u + v) = \det u$.

**Corrigé :** Si $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$, on a $\det(u + v) = \det u \det(\mathrm{id} + u^{-1} \circ v)$ et comme $u^{-1} v$ est nilpotent, on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice soit triangulaire supérieure stricte d'où $\det(\mathrm{id} + u^{-1} \circ v) = \det \mathrm{id} = 1$. Si $u \notin \mathrm{GL}(\mathrm{E})$, alors Ker $u$ est stable par $v$ d'où un endomorphisme $w$ induit par $v$ sur Ker $u$. Mais comme $v$ est nilpotent, $w$ l'est aussi donc de noyau non réduit à $0_{\mathrm{E}}$ et un élément non nul du noyau est dans $\mathrm{Ker}\,(u + v)$ d'où $\det(u + v) = 0 = \det u$. Ainsi

$$\boxed{\det(u + v) = \det u}$$

## Exercice 10 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{A} \end{array}\right) \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

Montrer que $\qquad \mathrm{A}$ diagonalisable $\iff$ B diagonalisable

**Corrigé :** On a $\qquad \mathrm{B}^2 = 2 \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^2 & \mathrm{A}^2 \\ \hline \mathrm{A}^2 & \mathrm{A}^2 \end{array}\right) \qquad \mathrm{B}^3 = 2^2 \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^3 & \mathrm{A}^3 \\ \hline \mathrm{A}^3 & \mathrm{A}^3 \end{array}\right)$

et par une récurrence immédiate

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{B}^k = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} (2\mathrm{A})^k & (2\mathrm{A})^k \\ \hline (2\mathrm{A})^k & (2\mathrm{A})^k \end{array}\right)$$

Il s'ensuit par combinaison linéaire

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \quad \text{avec} \quad \mathrm{P}(0) = 0 \qquad \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{P}(2\mathrm{A}) & \mathrm{P}(2\mathrm{A}) \\ \hline \mathrm{P}(2\mathrm{A}) & \mathrm{P}(2\mathrm{A}) \end{array}\right) \qquad (*)$$

Si B est diagonalisable, il existe P annulateur de B scindé à racines simples et on a $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) \subset \mathrm{Z}(\mathrm{P})$ où $\mathrm{Z}(\mathrm{P})$ désigne l'ensemble des racines de P. Comme $\mathrm{rg}\,(\mathrm{B}) < 2n$ puisque par exemple $\mathrm{L}_1 = \mathrm{L}_{n+1}$, on a $0 \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})$ d'où $\mathrm{P}(0) = 0$. Ainsi, le polynôme P vérifie la condition évoquée par $(*)$ et $\mathrm{P}(2\mathrm{X})$ est donc un polynôme annulateur scindé à racines simples de A d'où

$$\text{B diagonalisable} \quad \Longrightarrow \quad \text{A diagonalisable}$$

Réciproquement, si A est diagonalisable, il existe $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ annulateur de A scindé à racines simples. Quitte à considérer XQ, on a $0 \in \mathrm{Z}(\mathrm{Q})$. Ainsi, en posant $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{Q}(\mathrm{X}/2)$, il vient d'après la relation $(*)$ que $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 0$ avec P scindé à racines simples, autrement dit

$$\text{A diagonalisable} \quad \Longrightarrow \quad \text{B diagonalisable}$$

On conclut $\qquad \boxed{\text{A diagonalisable} \iff \text{B diagonalisable}}$

**Variantes :** 1. On peut faire sans polynôme annulateur mais c'est plus délicat. Si A est diagonalisable, on dispose de $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$ diagonale. Posant $\mathrm{Q} = \mathrm{diag}(\mathrm{P}, \mathrm{P})$, on trouve

$$\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{BB} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{D} & \mathrm{D} \\ \hline \mathrm{D} & \mathrm{D} \end{array}\right)$$

Puis, posant $\mathrm{R} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \\ \hline \mathrm{I}_n & -\mathrm{I}_n \end{array}\right)$, on trouve R inversible d'inverse $\mathrm{R}^{-1} = \dfrac{1}{2}\mathrm{R}$ et $(\mathrm{QR})^{-1}\mathrm{BQR} = \mathrm{diag}(2\mathrm{D}, 0)$. Réciproquement supposons B diagonalisable. On a

$$\mathbb{K}^{2n} = \mathrm{E}_0(\mathrm{B}) \oplus \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) \smallsetminus \{0\}} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{B})$$

Pour $\lambda \neq 0$ et $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{K})$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{BX} = \lambda\mathrm{X} &\iff \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{A} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \mathrm{X}_1 \\ \hline \mathrm{X}_2 \end{array}\right) = \lambda \left(\begin{array}{c} \mathrm{X}_1 \\ \hline \mathrm{X}_2 \end{array}\right) \\ &\iff \mathrm{A}(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2) = \lambda\mathrm{X}_1 = \lambda\mathrm{X}_2 \iff \begin{cases} \mathrm{X}_1 = \mathrm{X}_2 \\ \mathrm{AX}_1 = \dfrac{\lambda}{2}\mathrm{X}_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, avec l'application injective $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_1$, on envoie une famille libre de vecteurs propres de B associés à des valeurs propres non nulles sur des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres non nulles. On en déduit

$$\dim \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) \smallsetminus \{0\}} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{B}) \leqslant \dim \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \smallsetminus \{0\}} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$$

Avec les opérations $\mathrm{L}_{i+n} \leftarrow \mathrm{L}_{i+n} - \mathrm{L}_i$ pour $i \in [\![ 1 \,;\, n ]\!]$ puis $\mathrm{C}_{j+n} \leftarrow \mathrm{C}_{j+n} - \mathrm{C}_j$ pour $j \in [\![ 1 \,;\, n ]\!]$, il vient

$$\mathrm{rg}\ \mathrm{B} = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{A} \end{array}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \mathrm{rg}\ \mathrm{A}$$

D'après le théorème du rang, il s'ensuit

$$\dim \mathrm{E}_0(\mathrm{B}) = 2n - \mathrm{rg}\ \mathrm{B} = 2n - \mathrm{rg}\ \mathrm{A} = n + \dim \mathrm{E}_0(\mathrm{A})$$

Ainsi
$$2n \leqslant n + \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$$

On en déduit
$$n \leqslant \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) \leqslant \dim \mathbb{K}^n = n$$

et on conclut que la matrice A est diagonalisable.

2. Pour le sens direct, on peut aussi partir de l'égalité

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{E}_0(\mathrm{A}) \oplus \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \smallsetminus \{0\}} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$$

L'application injective $\mathrm{X} \mapsto \left(\begin{array}{c} \mathrm{X} \\ \hline \mathrm{X} \end{array}\right)$ envoie une famille libre de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres non nulles sur des vecteurs propres de B associés à des valeurs propres non nulles. L'application injective $\mathrm{X} \mapsto \left(\begin{array}{c} \mathrm{X} \\ \hline 0 \end{array}\right)$ envoie une famille libre de vecteurs propres de A associés à zéro sur une famille libre de vecteurs propres de B associés à zéro. On peut compléter cette famille par $(\mathrm{E}_j - \mathrm{E}_{j+n})_{1\leqslant j\leqslant n}$ famille de vecteurs propres de B associés à zéro. La famille obtenue est libre et on en déduit

$$\dim \mathrm{E}_0(\mathrm{B}) + \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})\smallsetminus\{0\}} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{B}) \geqslant n + \dim \mathrm{E}_0(\mathrm{A}) + \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})\smallsetminus\{0\}} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) = n + \dim \mathbb{K}^n$$

Le résultat suit.

## Exercice 11 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n$ et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ diagonalisable. On définit le *commutant* de $f$ par

$$\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \quad | \quad f\circ g = g\circ f\}$$

1. Justifier que $\mathscr{C}(f)$ est un sev de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Montrer : $\qquad g \in \mathscr{C}(f) \iff \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(f) \qquad \mathrm{E}_\lambda(f)$ stable par $g$
3. Déterminer $\dim \mathscr{C}(f)$.
4. Si les valeurs propres de $f$ sont simples, montrer que $\mathscr{C}(f) = \mathbb{K}[f]$.

**Corrigé :** 1. L'ensemble $\mathscr{C}(f)$ contient $0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ et est stable par combinaison linéaire par linéarité de la composition d'où

$$\boxed{\text{Le commutant } \mathscr{C}(f) \text{ est un sev de } \mathscr{L}(\mathrm{E}).}$$

2. Si $g \in \mathscr{C}(f)$, alors, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)$, les endomorphismes $g$ et $f - \lambda\,\mathrm{id}$ commutent d'où la stabilité de $\mathrm{E}_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id}\,)$ par $g$. Réciproquement, comme $f$ est diagonalisable, on a

$$\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(f)} \mathrm{E}_\lambda(f)$$

Soit $x \in \mathrm{E}$. On a $x = \sum\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(f)} x_\lambda$ sa décomposition dans la somme directe ci-avant. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)$, on a par stabilité de $\mathrm{E}_\lambda(f)$ par $g$ que $g(x_\lambda) \in \mathrm{E}_\lambda(f)$. Il s'ensuit

$$f\circ g(x) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(f)} f(g(x_\lambda)) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(f)} \lambda g(x_\lambda) = g\left(\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(f)} \lambda x_\lambda\right) = g\circ f(x)$$

Ainsi $\qquad \boxed{g \in \mathscr{C}(f) \iff \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(f) \qquad \mathrm{E}_\lambda(f) \text{ stable par } g}$

**Variante :** On note $\mathrm{Sp}\,(f) = \{\lambda_1, \ldots \lambda_r\}$ et $\mathscr{B}_k$ une base de $\mathrm{E}_{\lambda_k}(f)$ pour $k \in [\![ 1\,;\,r ]\!]$. La famille $\mathscr{B} = \biguplus\limits_{k=1}^{r} \mathscr{B}_k$ est une base de E adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \bigoplus\limits_{k=1}^{r} \mathrm{E}_{\lambda_k}(f)$. Si les sev propres sont stables, alors $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} g = \mathrm{diag}(\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_r)$. La matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} g$ commute clairement avec $\mathrm{diag}(\lambda_1 \mathrm{I}_{m_1}, \ldots, \lambda_r \mathrm{I}_{m_r})$ d'où le résultat.

3. On conserve les notations précédentes. D'après l'équivalence précédente, on obtient

$$g \in \mathscr{C}(f) \iff \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} g = \mathrm{diag}(\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_r)$$

avec $\mathrm{A}_k \in \mathscr{M}_{m_k}(\mathbb{K})$ et $m_k = \dim \mathrm{E}_{\lambda_k}(f)$ pour $k \in [\![ 1\,;\,r ]\!]$. L'application $g \mapsto \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} g$ étant un isomorphisme, on a $\mathscr{C}(f)$ isomorphe à l'ensemble des matrices diagonales par blocs de la forme précédente et par conséquent

$$\dim \mathscr{C}(f) = \sum_{k=1}^{r} \dim \mathscr{M}_{m_k}(\mathbb{K}) = \sum_{k=1}^{r} m_k^2$$

Autrement dit $$\boxed{\dim \mathscr{C}(f) = \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(f)} \dim \mathrm{E}_\lambda(f)^2}$$

**Variante :** Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)$, l'endomorphisme $g$ induit sur $\mathrm{E}_\lambda(f)$ un endomorphisme $g_\lambda \in \mathscr{L}(\mathrm{E}_\lambda(f))$. Considérons l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathscr{C}(f) & \longrightarrow \prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(f)} \mathscr{L}(\mathrm{E}_\lambda(f)) \\ g & \longmapsto (g_\lambda)_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(f)} \end{cases}$$

Comme une application est caractérisée par ses restrictions sur les sev d'une décomposition de E en somme directe, il s'ensuit que $\Phi$ est injective. Étant donné $(g_\lambda)_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(f)} \in \prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(f)} \mathscr{L}(\mathrm{E}_\lambda(f))$,

on pose $$g : x = \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(f)} x_\lambda \mapsto \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(f)} g_\lambda(x_\lambda)$$

où l'écriture $x = \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(f)} x_\lambda$ désigne la décomposition dans $\bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(f)} \mathrm{E}_\lambda(f)$. L'application $g$ ainsi définie est clairement dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ et vérifie le critère établi à la question précédente, autrement dit $g \in \mathscr{C}(f)$ ce qui prouve la surjectivité de $\Phi$. Par conséquent, l'application $\Phi$ est un isomorphisme et on retrouve

$$\boxed{\dim \mathscr{C}(f) = \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(f)} \dim \mathscr{L}(\mathrm{E}_\lambda(f)) = \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(f)} \dim \mathrm{E}_\lambda(f)^2}$$

4. Si les valeurs propres simples, on a $\pi_f = \chi_f$ d'où $\dim \mathbb{K}[f] = \dim \mathrm{E}$ et $\dim \mathrm{E}_\lambda(f) = 1$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)$ d'où

$$\dim \mathscr{C}(f) = \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(f)} \dim \mathrm{E}_\lambda(f) = \dim \mathrm{E} = \dim \mathbb{K}[f]$$

et comme on a clairement $\mathbb{K}[f] \subset \mathscr{C}(f)$, on conclut

$$\boxed{\mathscr{C}(f) = \mathbb{K}[f]}$$

**Remarques :** Pour $f$ diagonalisable, on peut faire mieux en montrant

$$f \text{ à valeurs propres simples } \iff \mathscr{C}(f) = \mathbb{K}[f]$$

Il suffit d'observer

$$\dim \mathbb{K}[f] = \deg \pi_f \leqslant \dim \mathrm{E} = \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(f)} \dim \mathrm{E}_\lambda(f) \leqslant \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}\,(f)} \dim \mathrm{E}_\lambda(f)^2 = \dim \mathscr{C}(f)$$

et il y a égalité si toutes les inégalités sont des égalités.

## Exercice 12 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$ et on pose $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} + \mathrm{MB}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Justifier que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis montrer que si A et B sont diagonalisables, alors $\varphi$ l'est.

**Corrigé :** 1. L'application $\varphi$ est clairement à valeurs dans E et linéaire par linéarité de la somme et bilinéarité du produit matriciel d'où

$$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

2. Il existe $\mathrm{P}, \mathrm{Q}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{Q}\Delta\mathrm{Q}^{-1}$ avec $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}$ et $\Delta = \mathrm{diag}(\mu_i)_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}$. On note $\mathrm{M}_{i,j} = \mathrm{PE}_{i,j}\mathrm{Q}^{-1}$ pour tout $(i, j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$. Pour $(i, j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$, on a

$$\varphi(\mathrm{M}_{i,j}) = \mathrm{AM}_{i,j} + \mathrm{M}_{i,j}\mathrm{B} = \mathrm{PDE}_{i,j}\mathrm{Q}^{-1} + \mathrm{PE}_{i,j}\Delta\mathrm{Q}^{-1}$$

et $$\mathrm{DE}_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell \underbrace{\mathrm{E}_{\ell,\ell}\mathrm{E}_{i,j}}_{\delta_{\ell,i}\mathrm{E}_{\ell,j}} = \lambda_i \mathrm{E}_{i,j} \qquad \mathrm{E}_{i,j}\Delta = \sum_{\ell=1}^{n} \mu_\ell \underbrace{\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{\ell,\ell}}_{\delta_{j,\ell}\mathrm{E}_{i,\ell}} = \mu_j \mathrm{E}_{i,j}$$

Ainsi $$\varphi(\mathrm{M}_{i,j}) = \lambda_i \mathrm{PE}_{i,j}\mathrm{Q}^{-1} + \mu_j \mathrm{PE}_{i,j}\mathrm{Q}^{-1} = (\lambda_i + \mu_j)\mathrm{M}_{i,j}$$

La famille $(\mathrm{M}_{i,j})_{(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2}$ est donc une famille de vecteurs propres de $\varphi$ et on vérifie sans difficulté qu'elle est libre ce qui prouve qu'il s'agit d'une base de diagonalisation de $\varphi$. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{A}, \mathrm{B} \text{ diagonalisables} \Longrightarrow \varphi \text{ diagonalisable}}$$

## Exercice 13 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer

$$\mathrm{A} \text{ nilpotente} \iff \forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^k) = 0$$

**Corrigé :** Le sens direct est immédiat puisque A est trigonalisable et $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) = \{0\}$. Réciproquement, supposons $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \neq \{0\}$ et notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres non nulles de A. Par trigonalisation, on a

$$\forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^k) = \sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i}\lambda_i^k = 0$$

En particulier $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \ldots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix}}_{=\mathrm{V}} \begin{pmatrix} m_{\lambda_1}\lambda_1 \\ \vdots \\ m_{\lambda_p}\lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a $$\det \mathrm{V} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant p} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

ce qui impose $m_{\lambda_i}\lambda_i = 0$ et qui est absurde puisque les $\lambda_i$ sont valeurs propres donc de multiplicité non nulle et sont supposées non nulles. Par conséquent, on a $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \subset \{0\}$ et comme A est trigonalisable, l'inclusion est une égalité et on obtient la nilpotence de A. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{A} \text{ nilpotente} \iff \forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^k) = 0}$$

**Variante :** Supposons $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^k) = 0$ pour $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. On en déduit $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{P}(\mathrm{A})) = 0$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ vérifiant $\mathrm{P}(0) = 0$. Supposons $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \neq \{0\}$. On considère la famille de polynômes interpolateur $(\mathrm{L}_\lambda)_\lambda$ associés à $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \cup \{0\}$. Le cardinal de cet ensemble est au plus $n+1$. Les polynômes $\mathrm{L}_\lambda$ sont donc de degré au plus $n$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \smallsetminus \{0\}$. On a $\mathrm{L}_\lambda(0) = 0$ d'où $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{L}_\lambda(\mathrm{A})) = 0$. Or, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1}$ d'où

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{L}_\lambda(\mathrm{A})) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{L}_\lambda(\mathrm{T})) = m_\lambda = 0 \quad \text{avec} \quad m_\lambda \geqslant 1$$

ce qui est absurde. On en déduit $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \subset \{0\}$ d'où l'égalité puisque le spectre complexe est non vide.

## Exercice 14 (***)

Pour $n \geqslant 2$, montrer que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

**Corrigé :** Soit H hyperplan de $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons $\mathrm{H} \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \varnothing$. Comme $\mathrm{I}_n \notin \mathrm{H}$, alors $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n) \oplus \mathrm{H} = \mathrm{E}$. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$ nilpotente. Il existe $(\mathrm{A}, \lambda) \in \mathrm{H} \times \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{M} = \mathrm{A} + \lambda \mathrm{I}_n$. Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{A}$ avec $\mathrm{X} \neq 0$, choix possible puisque A n'est pas inversible. On trouve $\mathrm{MX} = \lambda \mathrm{X}$. Or, le spectre d'une matrice nilpotente est réduit à $\{0\}$ d'où $\lambda = 0$ et par conséquent $\mathrm{M} = \mathrm{A} \in \mathrm{H}$. Ainsi, l'hyperplan contient toutes les matrices nilpotentes. Par stabilité par combinaison linéaire, il contient donc $\mathrm{E}_{n,1} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{E}_{i,i+1}$, somme de deux matrices triangulaires strictes. Mais cette matrice est inversible ce qui contredit l'hypothèse faite sur H. Par conséquent

$$\boxed{\text{Tout hyperplan de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \text{ rencontre } \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).}$$