ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026 02/10/2025

Commentaires - Devoir en temps libre n°04

Problème I

1. Nier la décroissance de f ne signifie pas f croissante. En effet, dire f décroissante signifie

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant f(y)$$

et sa négation $$\exists (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad | \quad x \leqslant y \quad \text{et} \quad f(x) < f(y)$$

2. Pas si bien réussie. Plusieurs approches sont possibles, en ayant recours au théorème des accroissements finis ou par calcul intégral en mentionnant le théorème de limite monotone. Ceux qui ont essayé de procéder par l'absurde se sont systématiquement trompés : nier avoir une limite nulle en $+\infty$ ne signifie pas avoir une limite non nulle en $+\infty$.

3. OK pour une majorité mais certains ne parviennent pas à finaliser l'étude de h qui est pourtant élémentaire.

4. OK pour presque tous ceux qui ont abordé la question.

Problème II

1, 2.(a), 2.(b) OK.

3. On vient d'établir $\Lambda \subset \operatorname{Vect}(\operatorname{Tr})$ et on vérifie également l'inclusion réciproque pour conclure.

Problème III

Problème très classique qui aborde les *polynômes de Tchebychev de seconde espèce.*

1. OK.

2. OK pour la plupart. Voir le corrigé pour une rédaction optimisée de la propriété à montrer par récurrence. Il faut procéder par récurrence double (ou éventuellement forte) et initialiser la récurrence sur deux rangs, les rangs $n = 0$ et $n = 1$ étant les plus naturels.

3. OK.

4. La majorité a trouvé la forme factorisée attendue mais peu justifient que les racines $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ pour $k \in [\![1 \,;\, n]\!]$ sont distinctes : il faut invoquer l'injectivité du cos sur $]\, 0 \,; \pi \,[$ en mentionnant par exemple sa stricte décroissance sur cet intervalle.

Problème IV

1. Peu réussie bien que la question soit un calcul très classique de somme géométrique.

2. Peu abordée, c'est dommage car la question n'est pas d'une technicité invraisemblable. Certains choisissent une interprétation entre matrices lignes, c'est un peu déroutant vu qu'il est naturel de travailler sur des matrices colonnes.

3. Plutôt bien traitée par ceux qui ont répondu à la question précédente.