

Commentaires - Devoir en temps libre n°05

Problème I

1. Pour la linéarité, soit on écrit le détail de $\varphi(\lambda P + Q)$ avec $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times E^2$, soit on invoque la linéarité de la dérivation et la bilinéarité du produit (mentionner $f(0_E) = 0_E$ n'est pas faux mais ne fait pas partie de la vérification d'usage et par conséquent, cela fait mauvais effet !). Pour vérifier le caractère endomorphisme, il faut privilégier le calcul de $\varphi(X^k)$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et invoquer la caractérisation d'une application linéaire sur une base (il faut donc avoir établi la linéarité avant). Cette démarche est très efficace et fournit également la matrice de φ dans la base canonique.

2. La matrice est triangulaire : la détermination du spectre est donc immédiate, il s'agit des termes diagonaux. Passer par le polynôme caractéristique ne s'impose nullement. Une majorité a déterminé les espaces propres par résolution d'une équation différentielle ce qui était clairement la meilleure démarche.  On résout une équation différentielle sur un intervalle que l'on choisit pour avoir des calculs aussi confortables que possibles.

Problème II

1. Cette question a été vue en cours : il fallait l'extraire de la détermination d'une puissance p -ième dans le cas trigonalisable (Réduction, applications de la réduction). Il n'est pas acceptable que certains aient échoué.  Certains pensent que le produit d'une matrice diagonale et d'une matrice triangulaire supérieure commute systématiquement. C'est faux, considérer par exemple $\text{diag}(1, 2)$ et $E_{1,2}$.

2. Trop peu de calculs efficaces de χ_A : nombreux sont ceux qui développent brutalement le déterminant. Ensuite, il faut suivre méthodiquement la trame présentée en cours qui garantit le résultat attendu sans arnaque. Ceux qui ont dérogé à cette règle ont systématiquement produit une rédaction incomplète. Dernier point : il faut aller au bout des calculs, en particulier inverser la matrice de passage et finaliser les changements de base.

Problème III

1. OK.

2. Il s'agissait d'un petit jumeau de l'exercice 7 de la feuille 17. Voir le corrigé pour une preuve efficace et non naïve.

3.(a) Question moyennement réussie alors que le calcul se mène sans difficulté. Il faut connaître impeccablement le résultat du produit $E_{k,\ell}E_{i,j}$ et s'en servir à bon escient.

3.(b) Certains invoque la condition suffisante de diagonalisation : elle ne permet pas de conclure ici car rien ne prouve que les $\lambda_i + \lambda_j$ sont des valeurs deux à deux distinctes et en fait, elles ne le

sont pas (il suffit d'échanger i et j pour le voir). Il ne faut pas omettre de vérifier que la famille $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de E .

Problème IV (bonus)

1. OK.

2. Question non comprise. Le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ méritait une rédaction particulière.

3-5. OK.

6. Rien ne garantit que $M_{i,j}X \neq 0$ pour $(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ *a priori*. En revanche, après extraction d'une base d'après le théorème de la base extraite, on dispose effectivement d'une base de vecteurs propres.

7. Question non comprise dans l'ensemble. Bien amorcée dans seulement trois copies. Prouver que $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \neq \emptyset$ ne suffit pas pour conclure : il faut aussi garantir l'existence d'une base de diagonalisation de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (ou $\mathbb{K}^n$ pour l'endomorphisme associé). À reprendre à l'aide du corrigé.