

Commentaires - Devoir surveillé n°2

Remarques générales : On numérote les copies doubles en k/n où n désigne le nombre de copies doubles. Écrire des majorations ou minoration avec des fonctions de signe non constant ne présente quasiment jamais d'intérêt en calcul intégral : il faut travailler en valeur absolue. On utilise des inégalités strictes quand on en a strictement besoin ! Sinon, on se contente d'inégalités larges. Les rédactions « on fait de même » qui font référence à des questions antérieures non traitées ou traitées seulement partiellement ou parfois même à des questions qui n'ont rien à voir avec la question en cours ne rapportent aucun point (et peuvent même agacer le correcteur).

 L'oubli de l'identification de l'intervalle d'intégration et de la continuité par morceaux de l'intégrande est encore beaucoup trop répandu. Il faut réagir ! Pour une fonction $f : X \times I \rightarrow \mathbb{K}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$, écrire « $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ » n'a pas de sens : il faut écrire $f(x, \cdot) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$. La notation de la dérivée partielle en la première variable est $\frac{\partial f}{\partial x}$ et pour $(x, t) \in X \times I$, on note $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$.

 Concernant la domination : une dominante doit être indépendante du paramètre x et intégrable sur l'intervalle I . Il faut absolument préciser $\forall (x, t) \in \dots$ pour identifier le champ de la domination. Certains rédigent tout en vue d'établir une domination locale sauf qu'ils mentionnent $\forall (x, t) \in X \times I$ ce qui constitue un véritable sabotage ...

Enfin, si l'on procède à une domination locale, c'est pour établir une régularité locale qui permet de conclure à une régularité sur X tout entier. On ne cherche jamais à étendre une domination locale pour en faire une domination globale : soit une domination globale est possible et dans ce cas, on l'établit ; dans le cas contraire, on se contente d'une domination locale et cela suffit : la régularité (continuité, caractère $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^k$) est une propriété locale.

Problème I

1. Il faut opter pour l'usage courant, à savoir I pour l'intervalle d'intégration et X pour le domaine du paramètre. L'invocation des « théorèmes généraux » ne sert jamais à conclure sur l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle.
2. L'inégalité des accroissements finis est trop peu citée. Par ailleurs, il faut qu'on lise explicitement le contrôle de la dérivée de $\cos$ en écrivant : $|\cos'| = |-\sin| \leq 1$.
3. Des rédactions souvent compliquées alors qu'une majoration en valeur absolue par $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$ est possible et permet de conclure sans effort.
4. On n'a pas accès à la valeur de F en zéro : il faut donc mentionner une constante d'intégration puis la déterminer à l'aide du comportement asymptotique de F en $+\infty$.

Problème II

1. Moyennement réussie. Certains se trompent lors de l'encadrement de $f(k)$ avec k entier. Par ailleurs, il faut impérativement recourir au théorème de limite monotone pour conclure à l'équivalence des convergences.
2. Il faut séparer $\alpha \leq 0$ des autres cas : la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ n'a pas lieu et on conclut avec la divergence grossière. Le corollaire qui permet d'établir que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\alpha^n}$ sont de même nature n'est pas immédiat et doit être détaillé.
3. Pas très bien traité alors qu'il s'agit d'un encadrement de type encadrement de reste.
4. Le terme en $O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ a posé problème pour un grand nombre.
5. La formule de Taylor reste intégral n'est pas très bien sue (malgré les interrogations du lundi matin ...).
6. Très peu abordée, avec succès dans deux copies.

Problème III

Il s'agit de prouver le célèbre théorème de *Bohr-Mollerup* : La fonction Γ est l'unique fonction $g :]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$ vérifiant :

- la fonction g est ln-convexe ;
- $\forall x > 0 \quad g(x+1) = xg(x)$;
- $g(1) = 1$.

Pour l'anecdote, les auteurs ont publié cette caractérisation de la fonction Γ dans un ouvrage d'analyse, persuadé que le résultat était déjà connu (ça laisse rêveur, publier fortuitement un théorème méconnu...)

Partie I

- 1, 2. Bien traitée pour la majorité. Certains échouent : ce n'est pas acceptable.
3. OK.

Partie II

- 4.(a) OK.
- 4.(b) Beaucoup d'erreurs. Il s'agit d'une intégrale impropre puisqu'il est possible d'avoir $x < 1$! Le critère de Riemann permet de conclure instantanément.
5. Idem.
- 6.(a) OK.

6.(b) Avec la présence du logarithme, le doute n'est plus permis : il faut ouvrir l'intervalle en zéro. Certains persistent à fermer cette borne ; il faut faire preuve d'esprit critique. Le sujet oriente vers une factorisation de $t^{x/2} \ln(t)$ qui permet de conclure sans difficulté.

7.(a) OK.

7.(b) Peu de bonnes choses : on suit la même trame que précédemment avec $t^{x/2} \ln(t) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

8. Il faut simplement lister méthodiquement les hypothèses de régularité $\mathcal{C}^2$ sous l'intégrale : toutes les difficultés techniques font l'objet de questions antérieures qu'il faut citer au moment opportun.

Partie III

9. Citer « par croissances comparées » comme une incantation magique ne suffit pas : il faut absolument détailler où apparaissent les croissances comparées en dissociant le terme en logarithme du terme en exponentielle.

10.(a) Beaucoup d'échecs alors qu'il s'agit de l'intégrande de la fonction Γ !

10.(b) Plusieurs rédactions possibles : on peut factoriser le terme étudié en question 9 ou encore vérifier $\ln(t)t^{x-1}e^{-t/2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

10.(c) Peu réussie dans l'ensemble. La factorisation du terme étudié en question 9 s'impose.

11. Mêmes remarques que pour la question 8.

Partie IV

12. Bien traitée dans l'ensemble : il faut rédiger soigneusement en mentionnant le crochet fini et les intégrales de même nature avant d'écrire la relation d'intégration par parties.

13. OK (certains échouent, ce n'est pas acceptable).

14. OK (attention au décalage : $\Gamma(n) = (n-1)!$ et non $n!$ pour n entier). Il faut évidemment s'interdire, pour cette toute première récurrence, d'écrire « par récurrence immédiate ».

15. Peu réussie : il fallait simplement observer $\Gamma(1) = \Gamma(2)$ et invoquer le théorème de Rolle.

16. Par dérivation sous l'intégrale, on obtient $\Gamma''(x) \geq 0$ pour $x > 0$. Certains veulent absolument écrire ici une inégalité stricte : ce n'est pas indispensable et si on écrit une relation stricte, il faut la justifier, ce n'est pas gratuit.

17. Cette fois, il faut impérativement la stricte monotonie de Γ et celle-ci demande un effort particulier avec l'utilisation de la séparation de l'intégrale sur l'intégrande continu positif de Γ'' .

18. Peu traitée.

Partie V

19, 20. OK.

21(a),(b),(c). Ceux qui persévèrent et abordent ces questions sont bien inspirés car celles-ci sont très accessibles.

22. Pas très bien réussie alors qu'un simple calcul de dérivée seconde permet de conclure.

23. Abordée dans trois copies seulement.

Partie VI

Quelques téméraires sont venus encore prendre quelques points dans cette partie, ce qui était tout à fait jouable.

24. Question très accessible, bien traitée par ceux qui l'ont abordée.

25.(a) Il s'agissait d'une application de l'inégalité des pentes que certains ont clairement identifiée.

25.(b) Résulte des deux questions précédentes, très accessible si on a encore du temps et les idées claires.

Plus grand monde ensuite. Deux étudiants parviennent à venir à bout (ou presque) de ce théorème de Bohr-Mollerup ! Bravo à eux !