ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°25

Exercice 1 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn. Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|x\| + \|y\| \leqslant \|x+y\| + \|x-y\|$$

Corrigé : Pour $(x,y) \in \mathrm{E}^2$, on écrit $x = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x-y}{2}$ puis $y = \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{2}$ et d'après l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|x\| + \|y\| \leqslant \|x+y\| + \|x-y\|}$$

Exercice 2 (**)

Soit E evn et $(x,y,z) \in \mathrm{E}^3$ tel que $x+y+z=0$. Montrer que

$$\|x-y\| + \|y-z\| + \|z-x\| \geqslant \frac{3}{2}\left(\|x\| + \|y\| + \|z\|\right)$$

Corrigé : On a

$$x = \frac{3x}{3} = \frac{1}{3}\left[2x-y-z\right] = \frac{1}{3}\left[x-y+y-z\right]$$

On applique ensuite l'inégalité triangulaire et on procède de même pour y et z. On conclut

$$\boxed{\|x-y\| + \|y-z\| + \|z-x\| \geqslant \frac{3}{2}\left(\|x\| + \|y\| + \|z\|\right)}$$

Exercice 3 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{K})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(f_1, \ldots, f_n) \in \mathrm{E}^n$ pour que l'application N définie par

$$\mathrm{N} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \|\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\|_\infty$$

soit une norme.

Corrigé : L'homogénéité et l'inégalité triangulaire découlent des propriétés de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Supposons $(f_1, \ldots, f_n)$ liée. Il existe donc $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = 0_\mathrm{E}$ d'où $\mathrm{N}(x_1, \ldots, x_n) = 0$ ce qui contredit la séparation. Il est donc nécessaire que $(f_1, \ldots, f_n)$ soit libre. Réciproquement, si $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre, par séparation de $\|\cdot\|_\infty$, on a pour $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\mathrm{N}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = 0_\mathrm{E} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \ldots = x_n = 0$$

Ainsi $\boxed{\text{L'application N est une norme si et seulement si } (f_1, \ldots, f_n) \text{ est une famille libre.}}$

Exercice 4 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $a_0, \ldots, a_n$ des réels et $\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}(\mathrm{P}) = \sum_{k=0}^{n} |\mathrm{P}(a_k)|$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que l'application N soit une norme.

Corrigé : L'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont immédiates. Si $a_i = a_j$ avec $i \neq j$, alors on $\mathrm{N}(\mathrm{P}) = 0$ avec $\mathrm{P} = \prod_{k \in [\![0\,;n]\!] \smallsetminus \{j\}} (\mathrm{X} - a_k) \neq 0$ donc il faut les a_i deux à deux distincts. Réciproquement, si $\mathrm{N}(\mathrm{P}) = 0$, alors P admet $n+1$ racines distinctes avec $\deg \mathrm{P} \leqslant n$ d'où sa nullité et on conclut

$$\boxed{\text{L'application N est une norme si et seulement si les } a_i \text{ sont deux à deux distincts.}}$$

Exercice 5 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On pose

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}_1(\mathrm{P}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\mathrm{P}^{(n)}(0)\right| \qquad \mathrm{N}_2(\mathrm{P}) = \operatorname*{Sup}_{t \in [\,0\,;1\,]} |\mathrm{P}(t)| \qquad \mathrm{N}_3(\mathrm{P}) = \operatorname*{Sup}_{t \in [\,1\,;2\,]} |\mathrm{P}(t)|$$

Montrer que N_1, N_2, N_3 sont des normes puis étudier leur équivalence.

Corrigé : L'homogénéité et l'inégalité triangulaire pour N_2 et N_3 découlent des propriétés de $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathscr{C}([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}([\,1\,;2\,],\mathbb{R})$. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{N}_2(\mathrm{P}) = 0$. Il s'ensuit que $\mathrm{P}(t) = 0$ pour tout $t \in [\,0\,;1\,]$ d'où une infinité de racines pour P et par conséquent $\mathrm{P} = 0$. Le même argument vaut pour N_3. L'homogénéité est immédiate pour N_1. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{N}_1(\mathrm{P}) = 0$. On a donc $\mathrm{P}^{(n)}(0) = 0$ pour tout n entier ce qui prouve que 0 est racine de P de multiplicité infinie donc $\mathrm{P} = 0$. Enfin, soit $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$. On a

$$\mathrm{N}_1(\mathrm{P} + \mathrm{Q}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|(\mathrm{P} + \mathrm{Q})^{(n)}(0)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\left|\mathrm{P}^{(n)}(0)\right| + \left|\mathrm{Q}^{(n)}(0)\right|\right] = \mathrm{N}_1(\mathrm{P}) + \mathrm{N}_1(\mathrm{Q})$$

Il n'y a aucune difficulté de convergence, les sommes étant finies. On conclut

$$\boxed{\text{Les applications } \mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, \mathrm{N}_3 \text{ sont des normes.}}$$

Avec $\mathrm{P}_n = \mathrm{X}^n$ pour n entier, on trouve

$$\mathrm{N}_1(\mathrm{P}_n) = n! \qquad \mathrm{N}_2(\mathrm{P}_n) = 1 \qquad \mathrm{N}_3(\mathrm{P}_n) = 2^n$$

Ainsi $\dfrac{\mathrm{N}_3}{\mathrm{N}_2}(\mathrm{P}_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty \qquad \dfrac{\mathrm{N}_1}{\mathrm{N}_2}(\mathrm{P}_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty \qquad \dfrac{\mathrm{N}_1}{\mathrm{N}_3}(\mathrm{P}_n) \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{2\mathrm{e}}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$

On conclut $\boxed{\text{Les normes } \mathrm{N}_1,\ \mathrm{N}_2 \text{ et } \mathrm{N}_3 \text{ ne sont pas équivalentes.}}$

Remarque : Pour comparer complètement ces normes, il faut étudier les deux inégalités de la définition de l'équivalence des normes. Avec $\mathrm{P}_n = (2 - \mathrm{X})^n$ pour n entier, on a

$$\mathrm{N}_2(\mathrm{P}_n) = 2^n \qquad \mathrm{N}_3(\mathrm{P}_n) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{N}_3}{\mathrm{N}_2}(\mathrm{P}_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$$

Soit $\mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{X}^n$ avec $(a_n)_n$ une suite presque nulle. On a

$$\mathrm{N}_2(\mathrm{P}) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_1(\mathrm{P}) = \sum_{n=0}^{+\infty} n!\,|a_n|$$

Ainsi
$$\boxed{\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}_2(\mathrm{P}) \leqslant \mathrm{N}_1(\mathrm{P})}$$

Remarque : La constante est optimale. Avec $\mathrm{P} = 1$, on trouve $\mathrm{N}_1(\mathrm{P}) = \mathrm{N}_2(\mathrm{P}) = 1$.

On a
$$\mathrm{N}_3(\mathrm{P}) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\,2^n \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_1(\mathrm{P}) = \sum_{n=0}^{+\infty} n!\,|a_n|$$

Par récurrence immédiate, on montre que $2^n \leqslant 2n!$ pour tout n entier et il vient
$$\boxed{\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}_3(\mathrm{P}) \leqslant 2\mathrm{N}_1(\mathrm{P})}$$

Remarque : La constante est optimale. Avec $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$, on a $\mathrm{N}_3(\mathrm{P}) = 2$ et $\mathrm{N}_1(\mathrm{P}) = 1$.

Exercice 6 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$. On pose
$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

Montrer que N est une norme puis étudier l'équivalence de N et $\|\cdot\|_\infty$.

Corrigé : L'application $\|\cdot\|_\infty$ étant une norme sur $\mathscr{B}([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$, il en découle sans difficulté que N est une norme. On a clairement $\|\cdot\|_\infty \leqslant \mathrm{N}$ mais $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas plus fine que N. Pour n entier, posant $f_n : t \mapsto t^n$, on trouve
$$\mathrm{N}(f_n) = 1 + n \quad \text{et} \quad \|f_n\|_\infty = 1$$

D'où
$$\frac{\mathrm{N}(f_n)}{\|f_n\|_\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Ainsi
$$\boxed{\text{Les normes N et} \|\cdot\|_\infty \text{ ne sont pas équivalentes.}}$$

Exercice 7 (**)

On pose
$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \forall (n,\theta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{R}(\theta)^k$$

Étudier la convergence de la suite $(\mathrm{S}_n(\theta))_{n\geqslant 1}$.

Corrigé : Soit θ réel avec $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. La matrice $\mathrm{R}(\theta)$ est une matrice de rotation. Ainsi, on a $\mathrm{R}(\theta)^k = \mathrm{R}(k\theta)$ pour tout k entier. Pour n entier non nul, il vient par téléscopage
$$(\mathrm{I}_2 - \mathrm{R}(\theta))\mathrm{S}_n(\theta) = \frac{1}{n}\,(\mathrm{I}_2 - \mathrm{R}(\theta)^n) = \frac{1}{n}\,(\mathrm{I}_2 - \mathrm{R}(n\theta))$$

Comme $\mathrm{I}_2 - \mathrm{R}(\theta) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et que les coefficients de $\mathrm{R}(n\theta)$ sont bornés, on trouve
$$\mathrm{S}_n(\theta) = (\mathrm{I}_2 - \mathrm{R}(\theta))^{-1}\frac{1}{n}(\mathrm{I}_2 - \mathrm{R}(n\theta)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi
$$\boxed{\forall \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \qquad \mathrm{S}_n(\theta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \forall \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \qquad \mathrm{S}_n(\theta) = \mathrm{I}_2}$$

Variante : Soit θ réel. La matrice $\mathrm{R}(\theta)$ est une matrice de rotation. Ainsi, on a $\mathrm{R}(\theta)^k = \mathrm{R}(k\theta)$ pour tout k entier. Par suite, pour n entier non nul

$$\mathrm{S}_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\begin{pmatrix}\cos(k\theta) & -\sin(k\theta)\\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta)\end{pmatrix}$$

Pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} = \frac{1}{n}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right| \leqslant \frac{2}{n\,|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Comme $|\mathrm{Re}\ z| \leqslant |z|$ et $|\mathrm{Im}\ z| \leqslant |z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, il s'ensuit que $\mathrm{S}_n(\theta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Pour $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a $\mathrm{R}(\theta) = \mathrm{I}_2$ et on conclut

$$\boxed{\forall\theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \qquad \mathrm{S}_n(\theta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \forall\theta \in 2\pi\mathbb{Z} \qquad \mathrm{S}_n(\theta) = \mathrm{I}_2}$$

Exercice 8 (*)

Soit $\mathrm{E} = \{f \in \mathscr{C}^2([\,0\,;\pi\,],\mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$. On pose

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}(f) = \|f + f''\|_\infty$$

Montrer que N est une norme puis étudier l'équivalence de N et $\|\cdot\|_\infty$.

Corrigé : L'homogénéité et l'inégalité triangulaire découlent des propriétés de la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathscr{C}([\,0\,;\pi\,],\mathbb{R})$. Vérifions la séparation. Soit $f \in \mathrm{E}$ telle que $\mathrm{N}(f) = 0$. Ainsi, la fonction f est solution de l'équation différentielle $f'' + f = 0$ d'où $f = \lambda\cos + \mu\sin$ avec λ, μ réels. Avec les conditions $f(0) = f'(0) = 0$, on obtient $\lambda = \mu = 0$ d'où la séparation. On pose

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \forall t \in [\,0\,;\pi\,] \qquad f_n(t) = t^n$$

La suite $(f_n)_n$ est à valeurs dans E et on trouve

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \|f_n\|_\infty = \pi^n \quad \text{et} \quad \mathrm{N}(f_n) = \sup_{t\in[\,0\,;\pi\,]}\,[t^n + n(n-1)t^{n-2}] = \pi^n + n(n-1)\pi^{n-2} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\pi^{n-2}$$

D'où
$$\frac{\|f_n\|_\infty}{\mathrm{N}(f_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi
$$\boxed{\text{Les normes } \|\cdot\|_\infty \text{ et N ne sont pas équivalentes.}}$$

Remarque : On a montré que $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas plus fine que N. En revanche, on peut montrer que N est plus fine que $\|\cdot\|_\infty$ mais c'est plus technique. Pour $f \in \mathrm{E}$, notant $g = f'' + f$, on trouve par variation de la constante (voir [Équations Différentielles Linéaires])

$$\forall t \in [\,0\,;\pi\,] \qquad f(t) = \int_0^t g(s)\sin(t-s)\,\mathrm{d}s$$

On en déduit
$$\|f\|_\infty \leqslant \pi\|g\|_\infty = \pi\mathrm{N}(f)$$

Exercice 9 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^1([0;1],\mathbb{R})$. On définit l'application N sur E par

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{N}(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 \,\mathrm{d}t}$$

Montrer que N est une norme puis la comparer à $\|\cdot\|_\infty$.

Corrigé : L'application N est la norme euclidienne associée à $(f,g) \mapsto f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$. On vérifie sans difficulté qu'il s'agit d'un produit scalaire. Ainsi

$$\boxed{\text{L'application N est une norme sur E.}}$$

Soit n entier. Pour $f_n(t) = t^n$ avec $t \in [0;1]$, on a

$$\|f_n\|_\infty = 1 \qquad \mathrm{N}(f_n) = \sqrt{\int_0^1 n^2 t^{2n-2}\,\mathrm{d}t} = \frac{n}{\sqrt{2n-1}}$$

Ainsi $\boxed{\text{Les normes N et } \|\cdot\|_\infty \text{ ne sont pas équivalentes.}}$

Soit $f \in \mathrm{E}$ et $x \in [0;1]$. On a $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ d'où

$$|f(x)| \leqslant |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Avec l'inégalité $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$ pour a, b réels, on trouve

$$|f(x)|^2 \leqslant 2\left(f(0)^2 + \left(\int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2\right)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\left(\displaystyle\int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \displaystyle\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$ et on conclut

$$\boxed{\forall f \in \mathrm{E} \qquad \|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\mathrm{N}(f)}$$

Remarques : (a) La constante est optimale. Pour $f : t \mapsto t+1$, on trouve $\|f\|_\infty = 2$ et $\mathrm{N}(f) = \sqrt{2}$.
(b) On peut avoir l'intuition que N est plus fine que $\|\cdot\|_\infty$: le contrôle de la position initiale et de l'« énergie » de la fonction f avec le terme $\displaystyle\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$ contraint les valeurs prises par la fonction et donc sa norme infinie.

Exercice 10 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Déterminer si l'une des deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ vérifie l'inégalité dite de *norme d'algèbre*, à savoir

$$\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$$

2. On suppose E muni d'une norme $\|\cdot\|$. Montrer qu'il existe une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que

$$\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\| \leqslant \mathrm{C}\|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$$

Corrigé : 1. Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$. On a

$$\|\mathrm{AB}\|_1 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right| \leqslant \sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n} |a_{i,k}|\,|b_{k,j}| \leqslant \sum_{1\leqslant i,j,k,\ell\leqslant n} |a_{i,j}|\,|b_{k,l}|$$

d'où
$$\boxed{\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\|_1 \leqslant \|\mathrm{A}\|_1 \|\mathrm{B}\|_1}$$

Pour $n \geqslant 2$, considérant J la matrice constituée de 1, on a $\mathrm{J}^2 = n\mathrm{J}$ et par suite

$$\boxed{\|\mathrm{J}^2\|_\infty = n\|\mathrm{J}\|_\infty = n > 1 = \|\mathrm{J}\|_\infty^2}$$

2. L'espace E étant de dimension finie, les normes sont équivalentes. Il existe $\alpha, \beta > 0$ tel que $\alpha\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\| \leqslant \beta\|\cdot\|_1$. Ainsi

$$\boxed{\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\| \leqslant \beta\|\mathrm{AB}\|_1 \leqslant \beta\|\mathrm{A}\|_1\|\mathrm{B}\|_1 \leqslant \frac{\beta}{\alpha^2}\|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|}$$