

Feuille d'exercices n°26

Exercice 1 (**)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 2$. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur E invariante par conjugaison, c'est-à-dire telle que

$$\forall (A, P) \in E \times \text{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \|A\| = \|P^{-1}AP\|$$

Corrigé : Soit $A = E_{1,n}$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à A . On note $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On a $u(e_n) = e_1 = 2e_1/2$. En considérant la base $\mathcal{B} = (e_1/2, e_2, \dots, e_n)$, on trouve $\text{mat}_{\mathcal{B}} u = 2A$ ce qui prouve A semblable à $2A$ puis $\|A\| = \|2A\| = 2\|A\|$ ce qui est absurde d'où

Il n'existe pas de norme sur E invariante par conjugaison.

Variante : On peut procéder directement matriciellement. Considérant $A = E_{1,n}$ puis $P = \text{diag}(1/2, 1, \dots, 1)$, on trouve $P^{-1}AP = 2A$ et on conclut comme précédemment.

Exercice 2 (**)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit la *norme de Frobenius* par $\|A\|_F = \sqrt{\text{Tr}(A^T A)}$ pour $A \in E$. Montrer que $\|\cdot\|_F$ est une norme et qu'elle vérifie

$$\forall (A, B) \in E^2 \quad \|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$$

Corrigé : Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$, on trouve

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2} = \|A\|_2$$

La norme de Frobenius est donc la norme $\|\cdot\|_2$ et c'est donc, en particulier, une norme. Si la norme de Frobenius était une norme d'opérateur, on aurait $\|I_n\|_F = 1$ ce qui n'est pas.

La norme de Frobenius est une norme mais ce n'est pas une norme d'opérateur.

Soit $(A, B) \in E^2$ et $C = AB$. On a $\|C\|_F^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} c_{i,j}^2$. Par définition du produit matriciel et inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, il vient

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad c_{i,j}^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right)$$

Ainsi

$$\|C\|_F^2 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} \left[\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right) \right] = \left(\sum_{1 \leq i,k \leq n} a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{1 \leq k,j \leq n} b_{k,j}^2 \right)$$

On conclut

$$\forall (A, B) \in E^2 \quad \|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$$

Exercice 3 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev normé et N_1, N_2 des normes sur E . Montrer que les normes N_1, N_2 sont équivalentes si et seulement si elles définissent les mêmes parties bornées sur E .

Corrigé : Le sens direct est un résultat du cours. Supposons N_1 et N_2 non équivalentes avec, par exemple, l'application $\frac{N_1}{N_2}$ non bornée sur $E \setminus \{0_E\}$. Pour n entier non nul, on dispose de $x_n \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \geq n$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad y_n = \frac{x_n}{N_1(x_n)}$$

et on considère la partie $A = \{y_n, n \in \mathbb{N}^*\}$. Cette partie est clairement bornée pour N_1 mais non pour N_2 . Par contraposée, on conclut

Des normes sont équivalentes si et seulement si elles définissent les mêmes parties bornées.

Exercice 4 (**)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, on note

$$N(P) = \|P' - P\|_{\infty, [0;1]} \quad \text{et} \quad \|P\|_{\infty} = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

1. Vérifier que ce sont des normes.
2. Comparer ces normes.

Corrigé : 1. Pour $P \in E$, on a $N(P) = 0$ si et seulement si $P' = P$ par séparation de $\|\cdot\|_{\infty}$ sur $\mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$. En considérant les degrés de chaque terme, on en déduit $P = 0$. Les autres propriétés ne présentent pas de difficulté. On conclut

Les applications N et $\|\cdot\|_{\infty}$ sont des normes sur E .

2. On pose $P_n = X^n$ pour n entier. Une étude de fonction de $t \mapsto t^n - nt^{n-1}$ montre que celle-ci décroît sur $[0;1]$ et on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad N(P_n) = (P'_n - P_n)(1) = n - 1 \quad \text{et} \quad \|P_n\|_{\infty} = 1$$

d'où
$$\frac{N(P_n)}{\|P_n\|_{\infty}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Puis, on pose $Q_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ pour n entier. On observe que $Q'_n = Q_{n-1}$ pour $n \geq 1$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad N(Q_n) = \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad \|Q_n\|_{\infty} = 1$$

d'où
$$\frac{N(Q_n)}{\|Q_n\|_{\infty}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Il n'y a pas de relation de finesse entre N et $\|\cdot\|_{\infty}$.

Exercice 5 (***)

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. On pose

$$\forall f \in E \quad N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f + f'\|_\infty$$

Montrer que N_1 et N_2 sont des normes puis les comparer entre elles et ensuite avec $\|\cdot\|_\infty$.

Corrigé : On vérifie sans difficulté que N_1 et N_2 sont des normes sur E . Par inégalité triangulaire, il vient

$$\forall f \in E \quad N_2(f) \leq N_1(f)$$

Soit $f \in E$ et $g = f' + f$. Déterminons une expression de f en fonction de g . Par résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec variation de la constante, on trouve

$$\forall t \in [0; 1] \quad f(t) = \int_0^t g(s) e^{s-t} ds$$

D'où

$$\forall t \in [0; 1] \quad |f(t)| \leq \|g\|_\infty \underbrace{\int_0^t e^{s-t} ds}_{\leq 1} \leq N_2(f)$$

puis

$$\forall t \in [0; 1] \quad |f'(t)| \leq |f'(t) + f(t)| + |f(t)| \leq 2N_2(f)$$

et ainsi

$$N_1(f) \leq 3N_2(f)$$

On conclut Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

On a

$$\forall f \in E \quad \|f\|_\infty \leq N_1(f) \leq 3N_2(f)$$

En revanche, les autres inégalités sont en défaut puisque pour $f_n : t \mapsto t^n$ avec n entier, on a

$$\|f_n\|_\infty = 1 \quad N_1(f_n) = N_2(f_n) = n + 1 \quad \implies \quad \frac{N_1(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = \frac{N_2(f_n)}{\|f_n\|_\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 6 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$. Montrer

$$E = \text{Ker}(u - \text{id}) \oplus \text{Im}(u - \text{id})$$

On pourra considérer $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k$ avec n entier non nul.

Corrigé : Soit $x \in \text{Ker}(u - \text{id}) \cap \text{Im}(u - \text{id})$. Posons $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k$ pour n entier non nul. On a $u(x) = x$ et par suite $v_n(x) = x$ pour tout n entier non nul. Par ailleurs, il existe $t \in E$ tel que $x = (u - \text{id})(t)$. Par suite

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x = v_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ (u - \text{id})(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [u^{k+1} - u^k](t) = \frac{1}{n} [u^n(t) - t]$$

Comme $\|u(a)\| \leq \|a\|$ pour tout $a \in E$, une récurrence immédiate donne $\|u^n(x)\| \leq \|x\|$ pour tout n entier. Ainsi, par inégalité triangulaire

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|x\| = \|v_n(x)\| \leq \frac{1}{n} [\|u^n(t)\| + \|t\|] \leq \frac{2\|t\|}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ainsi $\text{Ker}(u - \text{id}) \cap \text{Im}(u - \text{id}) = \{0_E\}$

Avec le théorème de rang, on conclut

$$\boxed{E = \text{Ker}(u - \text{id}) \oplus \text{Im}(u - \text{id})}$$

Exercice 7 (**)

Soit A partie non vide de $\mathbb{R}$. On définit N_A sur $\mathbb{K}[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad N_A(P) = \sup_{t \in A} |P(t)|$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que N_A soit une norme.

Corrigé : Il faut d'abord que l'ensemble $\{|P(t)|, t \in A\}$ admette une borne supérieure finie. Si A est non bornée, comme $|P(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$ pour P non constant, alors la borne supérieure est infinie. Si A est bornée, la fonction $t \mapsto |P(t)|$ continue l'est aussi sur A d'où l'existence d'une borne supérieure finie. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire découlent des propriétés de $\|\cdot\|_{\infty, A}$. Si A est une partie finie, alors $P = \prod_{a \in A} (X - a)$ est non nul avec $N_A(P) = 0$. Il faut donc que A soit infinie. Si A est infinie, pour P tel que $N_A(P) = 0$, il vient $P(a) = 0$ pour tout $a \in A$ d'où une infinité de racines pour P ce qui prouve $P = 0$ et donc la séparation. On conclut

L'application N_A est une norme si et seulement si la partie non vide A est infinie et bornée.

Exercice 8 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev normé et F un sev de E . Montrer

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad d(\lambda x, F) = |\lambda| d(x, F)$$

Corrigé : Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$. Si $\lambda = 0$, l'égalité est immédiate. Supposons $\lambda \neq 0$. On a pour $y \in F$

$$\|\lambda x - y\| = |\lambda| \|x - y/\lambda\| \geq |\lambda| \inf_{z \in F} \|x - z\| = |\lambda| d(x, F)$$

Passant à la borne inférieure pour $y \in F$, il vient

$$d(\lambda x, F) \geq |\lambda| d(x, F)$$

puis
$$d(x, F) = d\left(\frac{1}{\lambda} \lambda x, F\right) \geq \frac{1}{|\lambda|} d(\lambda x, F)$$

d'où
$$d(\lambda x, F) \leq |\lambda| d(x, F)$$

On conclut $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad d(\lambda x, F) = |\lambda| d(x, F)$

Exercice 9 (***)

Soient a, b, c et d des réels avec $a < b$ et $c < d$. On pose

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad N_1(P) = \sup_{t \in [a; b]} |P(t)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{t \in [c; d]} |P(t)|$$

Comparer les normes N_1 et N_2 .

Corrigé : Supposons $b > d$. On pose $P_n = (X - m)^n$ pour n entier avec $m = \min(a, c)$. On trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad N_1(P_n) = (b - m)^n \quad \text{et} \quad N_2(P_n) = (d - m)^n$$

Par suite

$$\frac{N_1(P_n)}{N_2(P_n)} = \left(\frac{b - m}{d - m} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Supposons $a < c$. On pose $Q_n = (X - M)^n$ pour n entier avec $M = \max(b, d)$. On trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad N_1(Q_n) = (M - a)^n \quad \text{et} \quad N_2(Q_n) = (M - c)^n$$

d'où

$$\frac{N_1(Q_n)}{N_2(Q_n)} = \left(\frac{M - a}{M - c} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Les autres cas $d > b$ et $c < a$ s'obtiennent par symétrie des rôles. On conclut

Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si $[a; b] = [c; d]$.

Supposons $a = c$ et $b > d$. On a

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \sup_{t \in [a; d]} |P(t)| \leq \sup_{t \in [a; b]} |P(t)|$$

autrement dit N_1 est plus fine que N_2 . Les autres situations avec un cas d'égalité entre bornes se traitent de la même manière. Ainsi

Si $a = c$ ou $b = d$, alors il existe une relation de finesse entre N_1 et N_2 .

Exercice 10 (***)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$ avec $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, on munit E de $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|P\|_\infty = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$.

On dit qu'une suite $(P_n)_n$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (p, n) \in \mathbb{N}^2 \quad n \geq N \implies \|P_{n+p} - P_n\| \leq \varepsilon$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{X^k}{k}$$

1. Montrer que $(P_n)_n$ est de Cauchy.
2. Montrer que $(P_n)_n$ ne converge pas.

Corrigé : 1. Soient n et p entiers non nuls. On a

$$\|P_{n+p} - P_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{X^k}{k} \right\| = \frac{1}{n+1} = o(1)$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe donc un seuil N entier tel que pour $n \geq N$ et p entier, on ait $\|P_{n+p} - P_n\| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire

La suite $(P_n)_n$ est de Cauchy.

2. Supposons $(P_n)_n$ convergente. Il existe alors $P \in E$ tel que $P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} P$. Notons $p = \deg P$. Soit n entier. On note α_k le coefficient de degré k de $P_n - P$. Il vient

$$\forall n \geq p+1 \quad \|P_n - P\| \geq \max_{k \geq p+1} |\alpha_k| = \frac{1}{p+1}$$

Ceci contredit $\|P_n - P\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et on conclut

La suite de Cauchy $(P_n)_n$ ne converge pas.

Remarque : Un espace dans lequel toute suite de Cauchy converge est dit *complet* (il n'est pas « troué »). Ici, l'espace $\mathbb{R}[X]$ n'est pas complet. Un espace vectoriel complet est appelé *espace de Banach*.

Exercice 11 (****)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A \in E$ avec $\text{Sp}(A) \subset D(0, 1)$. Étudier la convergence de la suite $(A^p)_p$.

Corrigé : Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à A . En considérant $\mathcal{B}_k = (e_1, e_2/k, \dots, e_n/k^{n-1})$ avec $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de trigonalisation de u et k un entier non nul, on a

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad u\left(\frac{e_j}{k^{j-1}}\right) = \frac{1}{k^{j-1}} \sum_{i=1}^j \alpha_{i,j} e_i = \lambda_j \frac{e_j}{k^{j-1}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{j-1} \frac{a_{i,j}}{k^{j-i}}}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0} \frac{e_i}{k^{i-1}}$$

où les λ_j désignent les valeurs propres de u . Ainsi, en choisissant k suffisamment grand, on peut trouver une base de trigonalisation de u tel que les termes au dessus de la diagonale soient inférieurs en valeur absolue à $\frac{\varepsilon}{n}$ avec $\varepsilon > 0$. On fait ce choix de k et on note $A' = \text{mat}_{\mathcal{B}_k} u$, $X = \text{mat}_{\mathcal{B}_k} x$ et $P = \text{mat}_{\mathcal{C}} \mathcal{B}_k$ la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}_k$. On définit

$$\|A\| = N(P^{-1}AP) = N(A') \quad \text{avec} \quad \forall M \in E \quad N(M) = \sup_{\|X\|_\infty=1} \|MX\|_\infty$$

Par suite

$$\|A\| = \sup_{\|X\|_\infty=1} \sup_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \left| \sum_{j=1}^n a'_{i,j} x_j \right| \leq \sup_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a'_{i,j}|$$

Comme A' est triangulaire et que les termes au dessus de la diagonale sont inférieurs en valeur absolue à $\frac{\varepsilon}{n}$, on a

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon \quad \text{avec} \quad \rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$$

La quantité $\rho(A)$ est appelée *rayon spectral* de A . On a choisi une norme subordonnée pour N d'où

$$\forall (M, N) \in E^2 \quad \|MN\| \leq \|M\| \|N\|$$

Par récurrence immédiate, on a donc $\|A^p\| \leq \|A\|^p$ pour p entier non nul. Comme $\rho(A) \in]0; 1[$, on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \varepsilon \in]0; 1[$ et par conséquent

$$0 \leq \|A^p\| \leq \|A\|^p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$$

Par encadrement, on conclut

$$A^p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0_E$$

Remarque : Il s'agit en fait d'une équivalence. Pour le sens direct, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et X normé (on normalise un vecteur propre) tel que $AX = \lambda X$. Ainsi, on a $A^p X = \lambda^p X$ pour tout p entier d'où

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad |\lambda|^p = \|A^p X\| \leq \|A\|^p \|X\|$$

On a $|\lambda|^p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$ d'où $|\lambda| < 1$.

Variante : Si on dispose de la continuité des applications linéaires en dimension finie, on peut procéder différemment. On dispose de $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda I_{m_\lambda} + T_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(A)}$$

avec les T_λ triangulaires supérieures strictes. On pose

$$B = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \text{diag}(\lambda I_{m_\lambda})_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \quad \text{et} \quad N = P \text{diag}(T_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(A)} P^{-1}$$

Ainsi, on a $A = B + N$ avec B diagonalisable, N nilpotente car semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte et un produit par blocs montre $BN = NB$. On note ℓ l'ordre de nilpotence de N . Pour p entier, on obtient avec la formule du binôme

$$A^p = (B + N)^p = \sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{p}{k} B^{p-k} N^k$$

On note $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec les $\lambda_i \in D(0, 1)$ puisque ce sont les valeurs propres de A . Pour $\lambda \in D(0, 1)$, on a par croissances comparées

$$\binom{p}{k} \lambda^{p-k} = \frac{p(p-1) \dots (p-k+1)}{k!} \lambda^{p-k} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{p^k}{k!} \lambda^{p-k} \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$$

On en déduit $\binom{p}{k} D^{p-k} = \text{diag} \left(\binom{p}{k} \lambda_1^{p-k}, \dots, \binom{p}{k} \lambda_n^{p-k} \right) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0_E$

et pour $k \in \llbracket 0; \ell - 1 \rrbracket$, l'application $M \mapsto PMP^{-1}N^k$ étant linéaire en dimension finie donc continue, il vient

$$\binom{p}{k} B^{p-k} N^k \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0_E$$

d'où

$$A^p = \sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{p}{k} B^{p-k} N^k \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0_E$$