

Préparation à l'interrogation n°09

1 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)}$;
2. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de

$$1 - \cos(t)^n = 1 - \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{nt^2}{2} + o(t^2)\right) = \frac{nt^2}{2} + o(t^2)$$

2 Dérivation

Dérivée première et seconde de f définie par

$$\forall t \in]-1; 1[\quad f(t) = \operatorname{sh}(\operatorname{Arcsin}(t))$$

3 Trigonométrie

1. $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
2. $\sin(a) \sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$

4 Calcul intégral

1. $\int^x \frac{dt}{1-t^2} = \int^x \frac{1+t+1-t}{2(1-t)(1+t)} dt = \frac{1}{2} \int^x \left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right] dt = \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right) ;$
2. $\int^x \ln(t) dt = [t \ln(t)]^x - \int^x dt = x \ln(x) - x ;$
3. Formule de Taylor avec reste intégral.

5 Formules d'Euler

Soit θ réel. On a

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

6 Formules

1. Inégalité de Taylor-Lagrange
2. $x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$

7 Séries numériques

1. Comparaison série/intégrale ;
2. Critère de d'Alembert ;
3. Critère des séries alternées ;
4. Contrôle du reste d'une série alternée.

8 Exercice type

Équivalent $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ (voir cours).

9 Exercice type

Contre exemple au théorème de Rolle pour une fonction à valeurs dans un $\mathbb{R}$ -ev de dimension ≥ 2 (voir cours).

10 Exercice type

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$. La norme $\|\cdot\|_1$ est une norme d'algèbre, c'est-à-dire sous-multiplicative

$$\forall (A, B) \in E^2 \quad \|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \|B\|_1$$

mais ce n'est pas une norme d'opérateur.

Corrigé : Soit $(A, B) \in E^2$. On a

$$\|AB\|_1 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \leq \sum_{1 \leq i, j, k \leq n} |a_{i,k}| |b_{k,j}| \leq \sum_{1 \leq i, j, k, \ell \leq n} |a_{i,j}| |b_{k,\ell}|$$

d'où

$$\boxed{\forall (A, B) \in E^2 \quad \|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \|B\|_1}$$

On a $\|I_n\|_1 = n \neq 1$ ce qui prouve qu'il ne s'agit pas d'une norme d'opérateur.

11 Exercice type

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$. Montrer $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de E est un fermé non compact d'intérieur vide.

Corrigé : L'indice de nilpotence est majoré par n . Notant $\varphi : E \rightarrow E, M \mapsto M^n$ continue par continuité du produit matriciel, on a $\mathcal{N} = \varphi^{-1}(\{0\})$. Puis, la suite $(kE_{1,n})_k$ est à valeurs dans $\mathcal{N}$ et non bornée. Enfin, pour $A \in \mathcal{N}$, on a par densité de $GL_n(\mathbb{K})$ que $B(A, \varepsilon) \cap GL_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$ pour tout $\varepsilon > 0$. Il en résulte qu'aucune boule ouverte n'est incluse dans $\mathcal{N}$ puisque les matrices nilpotentes sont non inversibles. On conclut

$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{N} \text{ est un fermé non compact d'intérieur vide.}}$

12 Exercice type

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn de dimension finie et $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\exists k \in [0; 1[\quad | \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq k \|x_n - x_{n-1}\|$$

Alors, la suite $(x_n)_n$ converge.

Corrigé : Voir cours.

13 Questions de cours

Séries et fonctions vectorielles, graphes usuels.