ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026 20/11/2025

Devoir en temps libre n°07

Problème I

Soit E un $\mathbb{K}$-evn, U un ouvert et K un compact avec $\mathrm{K} \subset \mathrm{U}$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{K} \qquad \mathrm{B}(x, r) \subset \mathrm{U}$$

Problème II

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ avec n entier non nul et $x_1, \ldots, x_n$ des réels dans $]\,0\,;1\,]$ deux à deux distincts.
On pose

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \|\mathrm{P}\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t \in [\,0\,;1\,]} |\mathrm{P}(t)|$$

$$\forall (\mathrm{P}, i) \in \mathrm{E} \times [\![\, 1\,;\, n \,]\!] \qquad \varphi_i(\mathrm{P}) = \int_0^{x_i} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = \bigcap_{i=1}^{n} \{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \;:\; |\varphi_i(\mathrm{P})| \leqslant 1\}$$

et $(\mathrm{L}_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ la famille de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ des polynômes de Lagrange associés à $(0, x_1, \ldots, x_n)$.

1. Justifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.
2. Justifier que $\mathscr{B} = (\mathrm{L}_i')_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E.
   On note $\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}$ la norme infinie relative à cette base.
3. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, déterminer une expression simple de $\|\mathrm{P}\|_{\infty,\mathscr{B}}$ en fonction des φ_i.
4. Établir que A est un compact.
5. Soit $(\mathrm{P}_k)_k \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\varphi_i(\mathrm{P}_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ pour tout $i \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]$. Établir

$$\|\mathrm{P}_k\|_\infty \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

Problème III

Un polynôme P de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est dit *pair* s'il vérifie $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(-\mathrm{X})$. Soit N entier. On note A_N l'ensemble des polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}]$ vérifiant $\mathrm{P}(-1) = \mathrm{P}(1) = 1$ et $\mathrm{P}(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [\,-1\,;1\,]$ puis

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{L}(\mathrm{P}) = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad a_\mathrm{N} = \inf\{\mathrm{L}(\mathrm{P}), \mathrm{P} \in \mathrm{A}_\mathrm{N}\}$$

1. Montrer que A_N est une partie convexe de $\mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}]$.
2. Montrer que $\|\mathrm{P}\|_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} |\mathrm{P}(x)|\ \mathrm{d}x$ définit une norme sur $\mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}]$.
3. Montrer que A_N est une fermé de $(\mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}], \|\cdot\|_1)$.
4. Montrer que la borne inférieure de L sur A_N est atteinte.
   On note $\mathrm{B}_\mathrm{N} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{A}_\mathrm{N} \mid \mathrm{L}(\mathrm{P}) = a_\mathrm{N}\}$.
5. Montrer que B_N est une partie convexe compacte.
6. Vérifier que B_N contient un polynôme pair.