Feuille d'exercices n°33

Exercice 1 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn, K un compact de E et $f : \mathrm{K} \to \mathrm{E}$ *localement lipschitzienne*, *i.e.* pour tout $a \in \mathrm{K}$, il existe un voisinage V_a de a et une constante $\mathrm{C}_a > 0$ tels que

$$\forall (x, y) \in (\mathrm{V}_a \cap \mathrm{K})^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| \leqslant \mathrm{C}_a \|x - y\|$$

Montrer que f est en fait lipschitzienne.

Corrigé : Supposons f non-lipschitzienne sur K. Alors, pour tout n entier, il existe x_n et y_n dans K tels que

$$\|f(x_n) - f(y_n)\| > n\|x_n - y_n\|$$

On remarque en particulier que $x_n \neq y_n$ pour tout n entier sans quoi l'inégalité ne serait pas stricte. La fonction f est continue sur K donc bornée. Ainsi, il existe $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que Im $f \subset \mathrm{B}_f(0, \mathrm{M})$ et par conséquent

$$\|x_n - y_n\| \leqslant \frac{2\mathrm{M}}{n}$$

d'où
$$\|x_n - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Comme $(x_n)_n$ est à valeurs dans le compact K, il existe φ extractrice telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in \mathrm{K}$ et de même $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Or, il existe un voisinage V_x tel que

$$\forall (a, b) \in (\mathrm{V}_x \cap \mathrm{K})^2 \qquad \|f(a) - f(b)\| \leqslant \mathrm{C}_x \|a - b\|$$

Or, à partir d'un certain rang, les suites $(x_\varphi(n))_n$ et $(y_{\varphi(n)})_n$ sont à valeurs dans V_x d'où

$$\varphi(n)\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\| < \|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\| \leqslant \mathrm{C}_x \|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\|$$

Enfin, comme on sait que $x_n \neq y_n$ pour tout n entier, en divisant par $\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\|$, on en déduit notamment $\varphi(n) < \mathrm{C}_x$ pour tout n entier ce qui est absurde puisque $\varphi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est lipschitzienne.}}$$

Exercice 2 (***)

Soit $(u_n)_n$ suite réelle bornée telle que $u_n + \dfrac{1}{2}u_{n+1} = a_n$ avec $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Corrigé : D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice φ tel que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. Par suite

$$u_{\varphi(n)+1} = 2a_{\varphi(n)} - 2u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2a - 2\ell$$

Considérons la suite $(v_n)_n$ définie par $v_0 = \ell$ et $v_{n+1} = 2a - 2v_n$. Il s'agit d'une suite de valeurs d'adhérences de $(u_n)_n$ d'après le résultat précédent. La suite $(v_n)_n$ est arithmético-géométrique.

Son point fixe α vérifie $\qquad \alpha = 2a - 2\alpha \iff \alpha = \dfrac{2a}{3}$

La suite $(v_n - \alpha)_n$ est géométrique de raison -2 et on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = (-2)^n \left(\ell - \frac{2a}{3}\right) + \frac{2a}{3}$$

Comme la suite $(u_n)_n$ est bornée, l'ensemble de ses valeurs d'adhérences l'est aussi et d'après l'expression ci-dessus, il s'ensuit que $\ell = \dfrac{2a}{3}$. Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est une suite réelle bornée avec une unique valeur d'adhérence. On conclut

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2a}{3}}$$

Exercice 3 (***)

Soit $f :]\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.

Corrigé : Soit $\varepsilon > 0$. On dispose de $\eta \in]\,0\,;1\,]$ tel que

$$\forall (x, y) \in]\,0\,;1\,]^2 \qquad |x - y| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Soit $(x_n)_n$ à valeurs dans $]\,0\,;1\,]$ de limite nulle. Pour n assez grand, on a $x_n \leqslant \eta$ d'où

$$|f(x_n)| \leqslant |f(\eta)| + \varepsilon$$

ce qui prouve que la suite $(f(x_n))_n$ est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on dispose de φ extractrice et ℓ réel tels que

$$f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$$

Soit $(y_n)_n$ une suite à valeurs dans $]\,0\,;1\,]$ de limite nulle. Pour n assez grand, on a $\left|y_n - x_{\varphi(n)}\right| \leqslant \eta$ d'où

$$|f(y_n) - \ell| \leqslant \left|f(y_n) - f(x_{\varphi(n)})\right| + \left|f(x_{\varphi(n)}) - \ell\right| \leqslant 2\varepsilon$$

ce qui prouve, par caractérisation séquentielle, que la fonction f admet une limite finie en 0. Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un prolongement par continuité en 0.}}$$

Exercice 4 (****)

Soit E un evn, X une partie compacte non vide de E et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{X}^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$$

1. Soit $a \in \mathrm{X}$. Montrer que a est valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Montrer que f est une isométrie, *i.e.*
$$\forall (x, y) \in \mathrm{X}^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$
3. Montrer que f est une bijection de X sur X.

Corrigé : 1. Par récurrence immédiate, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall (x,y) \in \mathrm{X}^2 \qquad \|x-y\| \leqslant \|f^k(x) - f^k(y)\|$$

d'où $$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad \|u_n - u_0\| \leqslant \|f^k(u_n) - f^k(u_0)\| = \|u_{n+k} - u_k\|$$

La suite $(u_n)_n$ est à valeurs dans X compact donc il existe φ une extractrice telle que $\left(u_{\varphi(n)}\right)_n$ converge dans X. On définit ψ sur $\mathbb{N}$ par $\psi(0) = \varphi(0)$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \psi(n+1) = \min\{\varphi(k),\ k > 2\psi(n)\}$$

D'après le résultat préliminaire, pour n entier

$$\|u_{\psi(n+1)-\psi(n)} - u_0\| \leqslant \|u_{\psi(n+1)} - u_{\psi(n)}\|$$

Il s'ensuit $$u_{\psi(n+1)-\psi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

Enfin, par construction, on a $\psi(n+1) > 2\psi(n)$ pour n entier d'où

$$\psi(n+2) - \psi(n+1) - (\psi(n+1) - \psi(n)) > \psi(n) \leqslant 0$$

ce qui prouve la stricte croissance de $(\psi(n+1) - \psi(n))_n$ qui est donc une extractrice. Ainsi

$$\boxed{\text{La valeur } a \text{ est valeur d'adhérence de } (u_n)_n.}$$

Remarque : L'extractrice $\psi(\cdot + 1) - \psi$ est complètement déterminée par le choix de φ.

2. Soit $(a,b) \in \mathrm{X}^2$. On construit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ comme précédemment. L'espace X^2 est compact comme produit d'espaces compacts. Ainsi, la suite $(u_n, v_n)_n$ admet une valeur d'adhérence et avec le même procédé que celui vu précédemment, on construit une extractrice χ telle que

$$u_{\chi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \quad \text{et} \quad v_{\chi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} b$$

Par ailleurs, comme $\chi(n) \geqslant 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$, il vient

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \|f(a) - f(b)\| \leqslant \|f^{\chi(n)-1}(f(a)) - f^{\chi(n)}(f(b))\| = \|u_{\chi(n)} - v_{\chi(n)}\|$$

Faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient $\|f(a) - f(b)\| \leqslant \|a-b\|$ et l'autre inégalité est vraie par hypothèse. Ainsi, on conclut que

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est une isométrie.}}$$

3. Comme f est une isométrie, elle est injective et continue. Comme X est compact, l'ensemble $f(\mathrm{X})$ est compact. D'après le résultat de la première question, on a $\mathrm{X} \subset \overline{f(\mathrm{X})}$ et comme $f(\mathrm{X})$ est compact donc fermé, il s'ensuit que $\mathrm{X} \subset f(\mathrm{X}) = \overline{f(\mathrm{X})}$. L'autre inclusion étant vraie par hypothèse, on a $f(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$ et on conclut

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est une bijection de X sur X.}}$$

Exercice 5 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn, F un sev fermé et G un sev de dimension finie. Montrer que F + G fermé.

Corrigé : Supposons $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}\,(a)$ avec $a \notin \mathrm{F}$ sinon le résultat est trivial. Soit $(x_n)_n \in (\mathrm{F}+\mathrm{G})^{\mathbb{N}}$ avec $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Pour n entier, il existe $(t_n, \lambda_n) \in \mathrm{F} \times \mathbb{K}$ tel que $x_n = t_n + \lambda_n a$. Si $(\lambda_n)_n$ est bornée, il existe φ extractrice telle que $\lambda_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \in \mathbb{K}$. Par suite, on a

$$t_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} - \lambda_{\varphi(n)} a \xrightarrow[n\to\infty]{} t = x - \lambda a$$

avec $t \in \mathrm{F}$ par fermeture de F. On en déduit $x = t + \lambda a \in \mathrm{F} + \mathrm{G}$. Si $(\lambda_n)_n$ n'est pas bornée, il existe ψ extractrice telle que $\lambda_{\psi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Par suite, comme $(x_n)_n$ converge, alors $x_n = \mathrm{O}(1)$ et par fermeture de F, on trouve

$$\frac{t_{\psi(n)}}{\lambda_{\psi(n)}} = \frac{x_n}{\lambda_{\psi(n)}} - a \xrightarrow[n\to\infty]{} -a \in \mathrm{F}$$

ce qui est absurde. On en déduit $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ fermé pour le cas $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}\,(a)$ et on procède par récurrence immédiate pour G de dimension finie. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{F} + \mathrm{G} \text{ est fermé.}}$$

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn, K un compact convexe non vide et $u \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E})$ tel que $u(\mathrm{K}) \subset \mathrm{K}$. On note $\mathrm{C} = (\mathrm{id} - u)(\mathrm{K})$ puis on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k \quad \text{et} \quad x_n = (\mathrm{id} - u) \circ u_n(a) \quad \text{avec} \quad a \in \mathrm{K}$$

1. Montrer que C est un compact.
2. Montrer que $(x_n)_n \in \mathrm{C}^{\mathbb{N}}$ puis $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
3. En déduire que u admet un point fixe dans K.

Corrigé : 1. On a $\mathrm{id} - u$ continue et $\mathrm{C} = (\mathrm{id} - u)(\mathrm{K})$ est l'image directe d'un compact par une application continue donc

$$\boxed{\text{L'ensemble C est compact.}}$$

2. Par récurrence immédiate, on a $u^k(\mathrm{K}) \subset \mathrm{K}$ pour tout k entier. Par convexité de K, on a

$$\forall n \in \mathrm{K} \times \mathbb{N}^* \qquad u_n(a) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(a) \in \mathrm{K}$$

Par conséquent, on a $x_n \in (\mathrm{id} - u)(\mathrm{K})$ pour tout n entier. Puis, par téléscopage,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[u^k(a) - u^{k+1}(a)\right] = \frac{1}{n}\left[a - u^n(a)\right]$$

L'ensemble K est compact donc borné et par conséquent, il existe $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \|x_n\| \leqslant \frac{1}{n}\left(\|a\| + \|u^n(a)\|\right) \leqslant \frac{2\mathrm{M}}{n}$$

On conclut $\boxed{(x_n)_n \in \mathrm{C}^{\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

3. L'ensemble C est compact donc fermé. Or, on a construit une suite à valeurs dans C convergente de limite nulle. Par fermeture de C, on en déduit

$$0 \in \mathrm{C} = (\mathrm{id} - u)(\mathrm{K})$$

Autrement dit $\boxed{\exists x \in \mathrm{K} \quad | \quad u(x) = x}$

Remarque : Il s'agit du *théorème de Markov-Kakutani.*

Exercice 7 (***)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev. On rappelle que pour $\mathrm{X} \subset \mathrm{E}$, l'enveloppe convexe de X notée Conv(X) vérifie

$$\mathrm{Conv}(\mathrm{X}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, n \geqslant 1, (x_i)_{i \in [\![1\,;\, n]\!]} \in \mathrm{X}^n, (\alpha_i)_{i \in [\![1\,;\, n]\!]} \in \mathbb{R}_+^n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

Si E est de dimension n, alors tout élément de Conv(X) peut s'écrire comme combinaison convexe de $n+1$ éléments de X (théorème de Carathéodory, voir feuilles de convexité). Montrer que dans ce cas, si X est compact, alors Conv(X) est compact.

Corrigé : Posons $$\mathrm{K} = \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \quad \middle| \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1 \right\}$$

L'ensemble K est un fermé borné de $\mathbb{R}^{n+1}$ espace de dimension finie d'où K compact. On note

$$\Phi \colon \begin{cases} \mathbb{R}^{n+1} \times \mathrm{E}^{n+1} \longrightarrow \mathrm{E} \\ \qquad (\alpha, x) \qquad \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i \end{cases}$$

Soient (α, x) et (β, y) dans $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathrm{E}^{n+1}$. On obtient

$$\begin{aligned} \|\Phi(\alpha, x) - \Phi(\beta, y)\| &= \|\Phi(\alpha, x) - \Phi(\alpha, y) + \Phi(\alpha, y) - \Phi(\beta, y)\| \\ &\leqslant \|\alpha\|_1 \|x - y\|_\infty + \|y\|_1 \|\alpha - \beta\|_\infty \end{aligned}$$

et la continuité de Φ s'en déduit. Puis, on observe que

$$\mathrm{Conv}(\mathrm{X}) = \Phi(\mathrm{K} \times \mathrm{X}^{n+1})$$

Or, l'ensemble $\mathrm{K} \times \mathrm{X}^{n+1}$ est compact comme produit de compacts et l'image d'un compact par une application continue étant compact, on conclut

$$\boxed{\text{Si X est compact dans E un } \mathbb{R}\text{-ev de dimension } n, \text{ alors Conv(X) est compacte.}}$$

Exercice 8 (***)

Une matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *cyclique* s'il existe $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que

$$\mathrm{Vect}\,(\mathrm{X}, \mathrm{AX}, \ldots, \mathrm{A}^{n-1}\mathrm{X}) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$$

Montrer que l'ensemble des matrices cycliques $\mathscr{C}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense connexe par arcs.

Corrigé : Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{C}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}\,(\mathrm{X}, \mathrm{AX}, \ldots, \mathrm{A}^{n-1}\mathrm{X}) = n$. On pose

$$\Phi \colon \begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad \mathrm{M} \quad \longmapsto \det(\mathrm{X}, \mathrm{MX}, \ldots, \mathrm{M}^{n-1}\mathrm{X}) \end{cases}$$

L'application Φ est polynomiale en les coefficients de M donc continue. On a $\Phi(\mathrm{A}) \neq 0$ et par conséquent, l'ensemble $\Phi^{-1}(\mathbb{C}^*)$, ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue, est un voisinage ouvert de A dans $\mathscr{C}_n(\mathbb{C})$. Soit $\mathscr{D}_n^s(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables à valeurs propres simples. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{D}_n^s(\mathbb{C})$, $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé et $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de diagonalisation. On pose $x = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$. On obtient

$$\det_{\mathscr{B}}(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

en reconnaissant un déterminant de Vandermonde. La famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est donc une base de $\mathbb{C}^n$ ce qui prouve que M est cyclique. Autrement dit, on a

$$\mathscr{D}_n^s(\mathbb{C}) \subset \mathscr{C}_n(\mathbb{C})$$

Comme l'ensemble $\mathscr{D}_n^s(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (vu en TD), la densité de $\mathscr{C}_n(\mathbb{C})$ en résulte. Enfin, on a

$$\mathrm{A} \in \mathscr{C}_n(\mathbb{C}) \iff \exists (\mathrm{P}, a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \quad | \quad \mathrm{A} = \mathrm{PC}(a_0, \ldots, a_{n-1})\mathrm{P}^{-1}$$

où $\mathrm{C}(a_0, \ldots, a_n)$ désigne la matrice compagne du polynôme $\mathrm{X}^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k$. Il suffit en effet de considérer $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à A avec $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mathscr{L} = (x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de $\mathbb{C}^n$ et d'écrire $\mathrm{mat}_{\mathscr{L}} u$. Ainsi, posant

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ (\mathrm{P}, a_0, \ldots, a_{n-1}) & \longmapsto & \mathrm{P}^{-1}\mathrm{C}(a_0, \ldots, a_{n-1})\mathrm{P} \end{array} \right.$$

On a

$$\Psi(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n) = \mathscr{C}_n(\mathbb{C})$$

C'est l'image d'un produit de deux connexes par arcs par une application continue. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathscr{C}_n(\mathbb{C}) \text{ est un ouvert dense connexe par arcs de } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).}$$