

Feuille d'exercices n°31

Exercice 1 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn. Montrer que si $B_f(0, 1)$ est compacte, alors $S(0, 1)$ l'est aussi.

Exercice 2 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn et K un compact et $F \subset E$.

1. Montrer que si F est un compact, alors $F + K$ est un compact.
2. Montrer que si F est fermé, alors $F + K$ est un fermé.

Exercice 3 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn et $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides de E et $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

Montrer que l'ensemble K est un compact non vide.

Exercice 4 (**)

Soient E, F des evn, $f \in \mathcal{C}(E, F)$ et $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts de E .

Montrer que

$$f \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(K_n)$$

Exercice 5 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn et K un compact. Pour $r > 0$, montrer que $F = \bigcup_{x \in K} B_f(x, r)$ est un fermé.

Exercice 6 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn et A, B des compacts de E . Montrer que $A \cup B$ est compact.

Exercice 7 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn. Montrer que si $S(0, 1)$ est compacte, alors $B_f(0, 1)$ l'est aussi.

Exercice 8 (**)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(X_n)_n$ et X des variables aléatoires discrètes à valeurs dans un compact K de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$. Montrer

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \implies \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Exercice 9 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn, F et K des parties de E non vides et disjointes. On suppose K compact. On note

$$d(K, F) = \inf_{(x, y) \in K \times F} \|x - y\|$$

1. Si F compact, montrer $d(K, F) > 0$.
2. Que peut-on dire si F fermé ?

Exercice 10 (*)

Soient E, F des evn et $A \subset E$ et $B \subset F$ des parties connexes par arc.

1. Montrer que $A \times B$ est connexe par arcs.
2. On suppose $E = F$. Montrer que $A + B$ est connexe par arcs.

Exercice 11 (*)

Soit $A = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$. L'ensemble A est-il compact ? Connexe par arcs ?

Exercice 12 (**)

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ non vide non réduit à un point et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que f est strictement monotone.

Exercice 13 (*)

L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est-il connexe par arcs ?

Exercice 14 (**)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de E est un fermé non compact d'intérieur vide connexe par arcs.

Exercice 15 (*)

Le cône $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = z^2$ est-il connexe par arcs ?

Exercice 16 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev normé de dimension infinie ou finie $n \geq 2$. Pour $R \geq 0$, on pose

$$\Gamma_R = \{x \in E : \|x\| > R\}$$

Montrer que Γ_R est connexe par arcs.