

Feuille d'exercices n°32

Exercice 1 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$ son graphe.

1. Montrer que si f est continue, alors Γ_f est fermé.
2. Montrer que si f est bornée et Γ_f fermé, alors f est continue.
3. Le résultat précédent a-t-il lieu sans l'hypothèse f bornée ?

Exercice 2 (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $(A^p)_p$ bornée. Pour p entier non nul, on pose $B_p = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} A^k$.

1. Montrer que la suite $(B_p)_{p \geq 1}$ admet une valeur d'adhérence B .
2. Montrer que B vérifie $B(I_n - A) = 0$.
3. En déduire B est une matrice de projection sur $\text{Ker}(A - I_n)$ parallèlement à $\text{Im}(A - I_n)$.
4. Conclure sur le comportement asymptotique de $(B_p)_{p \geq 1}$.

Exercice 3 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev normé de dimension finie et U un ouvert de E . Montrer que U peut s'écrire comme une union croissante de compacts.

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn et F un sev de dimension finie de E . Montrer

$$\forall x \in E \quad \exists y \in F \quad | \quad d(x, F) = \|x - y\|$$

Exercice 5 (***)

Soit E un evn, X une partie compacte non vide de E et $f : X \rightarrow X$ telle que

$$\forall (x, y) \in X^2 \quad \text{avec} \quad x \neq y \quad \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe α (considérer $\inf_{x \in X} \|x - f(x)\|$).
2. Soit $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in X$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que $(u_n)_n$ converge vers α .

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn, K un compact convexe non vide et $f : K \rightarrow K$ une application 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 7 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn. Montrer que si la sphère unité $S(0, 1)$ est compacte, alors E est de dimension finie.

Exercice 8 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn.

1. Soit $(x_n)_n$ suite à valeurs dans E pour laquelle il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad n \neq p \implies \|x_n - x_p\| \geq \varepsilon$$

Montrer que $(x_n)_n$ n'admet aucune sous-suite convergente.

2. Soit K un compact de E . Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier p non nul et $x_1, \dots, x_p$ dans E tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \varepsilon)$$

Exercice 9 (***)

Soit E un $\mathbb{R}$ evn de dimension finie, $g \in \mathcal{C}(E, \mathbb{R}_+)$ avec $g(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$. On note $m = \inf_{x \in E} g(x)$. Montrer que g admet un minimum global.

Exercice 10 (***)

Soit E, F des $\mathbb{K}$ -ev normés de dimension finie, $f : E \rightarrow F$ continue. On dit que f est *propre* si pour tout K compact de F , l'ensemble $f^{-1}(K)$ est un compact de E .

1. Montrer que si f est propre, alors pour tout C fermé, l'ensemble $f(C)$ est fermé.

2. Montrer
$$f \text{ propre} \iff \|f(x)\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$$

Exercice 11 (***)

Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 12 (***)

Montrer que les composantes connexes d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sont ouvertes. En déduire que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.