TD – Ch EM 1 - Electrostatique

Exercice 1*♥ : Champ de gravitation de la Terre

La Terre est assimilée à une sphère de rayon $R=6{,}37.10^3$km et de masse $M=5{,}97.10^{24}$kg répartie uniformément.

1) Exprimer (par le théorème de Gauss) le champ de gravitation à l'extérieur de la Terre.
2) Vérifier qu'on obtient le même résultat en considérant que toute la masse de la Terre est concentrée en son centre.

Exercice 2* : Champ créé par un cylindre et un fil coaxiaux

On considère la distribution D constituée par la réunion d'un fil infini (Oz) chargé avec la densité linéique uniforme $\lambda>0$, et d'un cylindre infini de rayon R, d'axe (Oz), chargé avec la densité surfacique $\sigma>0$.
Exprimer le champ électrostatique en tout point de l'espace.

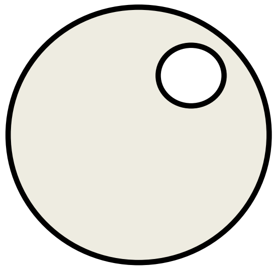
Exercice 3**♥ : Répartition de charges entre trois plans

On considère 4 régions de l'espace délimitées par 3 plans infinis, de densités volumiques de charges :

- Région 1 : $\rho = 0$, $x< -L_a$
- Région 2 : $\rho = - \rho_a$, $-L_a<x<0$
- Région 3 : $\rho = \rho_d$, $0<x<L_d$
- Région 4 : $\rho = 0$, $L_d<x$

1) Ecrire la condition de neutralité de l'ensemble. Cette condition sera supposée vérifiée dans la suite de l'exercice.
2) Préciser les conséquences des symétries et invariances pour $\vec{E}$(M) en tout point M de l'espace.
3) Exprimer $\vec{E}$(M) dans les régions 2 et 3 sachant que le champ est nul dans les régions 1 et 4.
4) Que vaut la différence de potentiel U entre les potentiels en $x- = +L_d$ et $x = -L_a$?

Exercice 4**♥ : Grotte sphérique



Une cavité sphérique de centre O' est creusée à l'intérieur d'un astre sphérique homogène de centre O et de masse volumique ρ. Déterminer le champ gravitationnel **dans la cavité** en fonction de ρ, G (la constante de gravitation) et du vecteur $\overrightarrow{OO'}$.

Indication : On décomposera le problème en une boule B pleine de centre O, de rayon R et de masse volumique ρ et une boule B' de centre O', de rayon R' et de masse volumique ρ' = -ρ.

Exercice 5**♥ : Etude du système Terre-électrosphère

Au-delà d'une altitude h=60km, l'atmosphère est ionisée par le rayonnement solaire. Alors sa conductivité est suffisante pour que cette région soit équipotentielle, on l'appelle l'électrosphère. On la modélise par une surface équipotentielle sphérique de rayon R+h (où $R=6{,}0.10^3$ km est le rayon de la Terre), de potentiel V_h et de charge Q (Q>0) uniformément répartie en surface.
D'autre part la Terre est assimilée à un conducteur parfait de potentiel nul (boule équipotentielle) portant la charge -Q uniformément répartie sur sa surface.
L'ensemble forme un condensateur sphérique dont l'armature intérieure est la Terre et dont l'électrosphère est l'armature extérieure. L'air entre les armatures a une permittivité proche de celle du vide. En réalité, l'air est faiblement conducteur et un faible courant de fuite circulant entre les armatures décharge rapidement le condensateur Terre-électrosphère. Mais la convection dans les nuages orageux est responsable de transferts de charges qui rechargent le condensateur et assurent une différence de potentiel de V_h=360kV entre l'électrosphère et le sol.

1) Exprimer en fonction de la charge Q (et…) le champ électrostatique entre les armatures du condensateur.
2) En écrivant la circulation de ce champ entre la Terre et l'électrosphère, exprimer V_h en fonction de Q, R, h et ε_0.
3) En déduire la capacité de ce condensateur en fonction de R, h et ε_0.
4) Calculer numériquement l'énergie électrostatique de ce condensateur et le champ électrostatique au niveau du sol.

Exercice 6*** : Modèle d'orbitale atomique

L'atome d'hydrogène est composé d'un proton de charge +e formant le noyau en O et d'un nuage électronique dont la théorie quantique permet de déterminer la densité de charge ρ_e. Dans l'état fondamental, la densité de charges prend, en coordonnées sphériques la forme : $\rho_e(r)=K.\exp(-2r/a_0)$ où a_0 est le rayon de Bohr.

1) Déterminer la valeur de K permettant d'assurer la neutralité de l'atome.
2) Préciser les caractéristiques (issues des symétries du problème) du champ électrostatique créé par l'atome en tout point de l'espace.
3) Calculer le champ électrostatique et commenter sa décroissance avec la distance au noyau.

Indication : On donne une primitive de $u^2\exp(-u)$: $-(u^2+2u+2)\exp(-u)$.

Réponses :

Ex 1 : $\vec{g} = -\frac{\mathcal{G}M}{r^2}\overrightarrow{u_r}$

Ex 2 : Si $0 < r < R$, $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\overrightarrow{u_r}$. Si $r > R$, $\vec{E} = \frac{\lambda+2\pi R\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r}\overrightarrow{u_r}$

Ex 3 : 1) $L_d\rho_d = L_a\rho_a$ 2) $\vec{E} = E(x)\overrightarrow{u_x}$ 3) Région 2 : $\overrightarrow{E_2} = -\frac{\rho_a}{\varepsilon_o}(x+L_a)\overrightarrow{u_x}$ Région 3 : $\overrightarrow{E_3} = \frac{\rho_d}{\varepsilon_o}(x-L_d)\overrightarrow{u_x}$
4) $U = \frac{\rho_d L_d}{2\varepsilon_o}(L_a+L_d)$

Ex 4 : $\vec{g} = \frac{4}{3}\pi\mathcal{G}\rho\overrightarrow{O'O}$

Ex 5 : 1) $\vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$ 2) $V_h = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right]$ 3) $C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}}$ 4) $W_{élec} = 4{,}4.10^9 J$; $E_{sol} = 6{,}1 V.m^{-1}$

Ex 6 : 1) $K = -e/(\pi.a_0^3)$ 2) $\vec{E}(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}[2r^2/a^2 + 2r/a_0 + 1]\exp(-2r/a_0)\overrightarrow{u_r}$