SÉRIES ET FONCTIONS VECTORIELLES

B. Landelle

Table des matières

Dans ce chapitre, l'ensemble E désigne un $\mathbb{K}$-ev normé de dimension finie de base $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point. Pour $(u_n)_n \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$, on note $u_n = \sum\limits_{i=1}^{p} u_{i,n} e_i$ et $f = \sum\limits_{i=1}^{p} f_i e_i$ où les $(u_{i,n})_n$ et f_i sont respectivement suites et fonctions coordonnées.

Notations : Soit $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$. On définit $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{V} \in \mathscr{V}(a) \quad | \quad \forall x \in \mathrm{V} \qquad \|f(x)\| \leqslant \varepsilon\, |g(x)|$$

On suppose que la fonction g ne s'annule pas sur $\mathrm{I} \smallsetminus \{a\}$. On a $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ si et seulement si $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0_{\mathrm{E}}$. L'expression $\mathrm{o}(1)$ signifie ici une fonction de limite nulle dans E en a. Ainsi, la relation $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ équivaut à $f(x) \underset{x \to a}{=} g(x)\mathrm{o}(1)$.

I Séries vectorielles

1 Définitions, propriétés

Définition 1. *Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans* E. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. On appelle* série *de terme général u_n la suite $(\mathrm{S}_n)_n$ que l'on note $\sum u_n$ ou $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$. On dit que S_n est la* somme partielle *d'indice n (ou d'ordre n) de la série $\sum u_n$.*

Remarque : Pour une suite de terme général u_n définie à partir du rang n_0, on définit la série à partir du même rang et on la note $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n = (\mathrm{S}_n)_{n \geqslant n_0}$ avec $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$.

Définition 2. *La série $\sum u_n$ à valeurs dans* E *est dite* convergente *(ou* converge*) si la suite des sommes partielles $(\mathrm{S}_n)_n$ converge. Dans ce cas, la limite de $(\mathrm{S}_n)_n$ est appelée* somme *de la série et notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$. La série $\sum u_n$ est dite* divergente *(ou* diverge*) si la suite $(\mathrm{S}_n)_n$ est divergente.*

Remarques : (1) Pour une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ à valeurs dans E définie à partir du rang n_0 telle que $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ converge, la somme de la série est notée $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$. On adapte de la même manière toutes les définitions et résultats qui suivent.

(2) On a
$$\sum u_n \text{ converge} \iff \forall i \in [\![1\,;p]\!] \qquad \sum u_{i,n} \text{ converge}$$

et dans ce cas
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{i,n} \right) e_i$$

Vocabulaire : Deux séries à valeurs dans E sont dites de *même nature* si elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes. Les séries $\sum u_n$ et $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ avec n_0 entier sont clairement de même nature.

Exemple : Soit θ réel. La série $\sum \dfrac{1}{2^n} \mathrm{R}(\theta)^n$ converge avec $\mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et on trouve

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \mathrm{R}(\theta)^n = \frac{2}{5 - 4\cos(\theta)} \begin{pmatrix} 2 - \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 2 - \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Définition 3. *Soit* $\sum u_n$ *une série à valeurs dans* E *convergente de somme* S. *On appelle* reste *de la série* $\sum u_n$ *d'ordre* n *la quantité définie par*

$$\mathrm{R}_n = \mathrm{S} - \mathrm{S}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Proposition 1. *Si* $\sum u_n$ *converge, alors la suite* $(\mathrm{R}_n)_n$ *est convergente de limite nulle.*

Démonstration. Immédiate. □

Théorème 1 (Condition Nécessaire de convergence). *Si la série* $\sum u_n$ *à valeurs dans* E *converge, alors* $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Démonstration. On a $u_n = \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{S} - \mathrm{S} = 0$. □

Vocabulaire : La contraposée donne : si $(u_n)_n$ ne tend pas zéro, alors $\sum u_n$ diverge. Une série $\sum u_n$ dont le terme général u_n ne tend pas vers zéro sera dite *grossièrement divergente*.

Exemple : Pour θ réel, la série $\sum \mathrm{R}(\theta)^n = \sum \mathrm{R}(n\theta)$ diverge grossièrement puisque

$$\|\mathrm{R}(n\theta)\|_2 = \sqrt{2} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Théorème 2. *L'ensemble des séries à valeurs dans* E *convergentes muni de l'addition et du produit extérieur par un scalaire est un* $\mathbb{K}$*-ev comme sev de* $\mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ *et on a la linéarité de la somme :*

1. *Soit* $\sum u_n$ *convergente et* $\lambda \in \mathbb{K}$, *alors* $\sum \lambda \cdot u_n$ *converge et* $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda \cdot u_n = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
2. *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergentes, alors* $\sum (u_n + v_n)$ *converge et* $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Démonstration. Immédiat d'après les résultats sur les suites à valeurs dans E. □

Définition 4. *Une série* $\sum v_n$ *à valeurs dans* E *est dite* téléscopique *s'il existe une suite* $(u_n)_n$ *à valeurs dans* E *telle que* $v_n = u_{n+1} - u_n$ *pour tout* n *entier.*

Proposition 2. *Soit* $\sum v_n$ *une série téléscopique à valeurs dans* E *avec* $v_n = u_{n+1} - u_n$. *La série* $\sum v_n$ *converge si et seulement si la suite* $(u_n)_n$ *converge et dans ce cas*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0$$

Démonstration. Pour n entier non nul, on a $\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} [u_{k+1} - u_k] = u_n - u_0$ et le résultat suit. □

2 Convergence absolue

On rappelle que l'espace E est de dimension finie.

Définition 5. *Une série* $\sum u_n$ *à valeurs dans* E *est dite* absolument convergente *(ou converge absolument) si la série numérique* $\sum \|u_n\|$ *converge.*

Théorème 3. *Soit* $\sum u_n$ *une série à valeurs dans* E *absolument convergente. Alors la série* $\sum u_n$ *converge et on a l'inégalité triangulaire généralisée*

$$\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$$

Démonstration. Les normes étant équivalentes, on munit E de $\| \ \|_{\infty,\mathscr{B}}$. On a

$$\forall i \in [\![1 \,;\, p]\!] \qquad |u_{i,n}| \leqslant \|u_n\|_{\infty,\mathscr{B}}$$

Par comparaison, on obtient la convergence absolue et donc la convergence des séries numériques $\sum u_{i,n}$ et par suite la convergence de la série $\sum u_n$. D'après l'inégalité triangulaire classique, on a $\|\sum_{k=0}^{n} u_k\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|u_k\|$ pour n entier et par continuité de la norme, le résultat suit faisant tendre $n \to +\infty$. □

Remarques : (1) On a utilisé de manière essentielle le fait que l'espace E est de dimension finie dans la preuve. La convergence absolue implique la convergence dans un cadre plus général, celui des *espaces de Banach* mais ceci dépasse le cadre de ce cours.
(2) L'inégalité généralisée est à redémontrer en cas de besoin.

Exemple : Soit θ réel. La série $\sum \frac{1}{2^n} \mathrm{R}(\theta)^n$ converge absolument puisque

$$\sum \|\frac{1}{2^n}\mathrm{R}(\theta)^n\|_2 = \sum \frac{\sqrt{2}}{2^n}$$

et on a

$$\|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\mathrm{R}(\theta)^n\|_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5 - 4\cos\theta)}} \leqslant 2\sqrt{2}$$

Théorème 4. *L'ensemble des séries à valeurs dans* E *absolument convergentes est un* $\mathbb{K}$*-ev.*

Démonstration. Conséquence de l'inégalité triangulaire. □

3 Exemples importants

Les résultats qui suivent existent à l'identique en version vectorielle et matricielle.

On rappelle que l'espace E étant de dimension finie, on a $\mathscr{L}_c(\mathrm{E}) = \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et qu'on définit pour $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ sa *norme subordonnée* ou *norme d'opérateur* par

$$\|u\|_{\mathrm{op}} = \operatorname*{Sup}_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

qui vérifie

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|u(x)\| \leqslant \|u\|_{\mathrm{op}}\|x\|$$

et

$$\forall (u,v) \in \mathscr{L}(\mathrm{E})^2 \qquad \|u \circ v\|_{\mathrm{op}} \leqslant \|u\|_{\mathrm{op}}\|v\|_{\mathrm{op}}$$

Théorème 5. *La norme subordonnée est une* norme d'algèbre *sur* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$*, c'est-à-dire c'est une norme sur* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ *telle que*

$$\forall (u,v) \in \mathscr{L}(\mathrm{E})^2 \qquad \|u \circ v\|_{\mathrm{op}} \leqslant \|u\|_{\mathrm{op}} \|v\|_{\mathrm{op}}$$

On a de plus $\|\,\mathrm{id}\,\|_{\mathrm{op}} = 1$.

Démonstration. La séparation et l'inégalité triangulaire découlent d'une des propriétés précédentes. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, on montre $\|\lambda u\|_{\mathrm{op}} \leqslant |\lambda|\,\|u\|_{\mathrm{op}}$ puis $\|u\|_{\mathrm{op}} \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|}\|\lambda u\|_{\mathrm{op}}$ pour $\lambda \neq 0$. L'inégalité sous-multiplicative a été rappelée précédemment et on a clairement $\|\,\mathrm{id}\,\|_{\mathrm{op}} = 1$. □

Proposition 3 (À savoir refaire). *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *tel que* $\|u\|_{\mathrm{op}} < 1$*. La série* $\sum u^n$ *converge absolument et l'endomorphisme* $\mathrm{id} - u$ *est inversible d'inverse*

$$(\mathrm{id} - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$$

Démonstration. Par récurrence immédiate, on a $\|u^n\|_{\mathrm{op}} \leqslant \|u\|_{\mathrm{op}}^n$ et $\sum \|u\|_{\mathrm{op}}^n$ converge d'où la convergence absolue puis, par téléscopage et continuité de la composition (linéaire en dimension finie), il vient

$$(\mathrm{id} - u) \circ \sum_{k=0}^{n} u^k = \sum_{k=0}^{n} \left[u^k - u^{k+1}\right] = \mathrm{id} - u^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{id} = (\mathrm{id} - u) \circ \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$$

□

Proposition 4. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$*. La série* $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ *converge absolument.*

Démonstration. On a $\dfrac{\|u^n\|_{\mathrm{op}}}{n!} \leqslant \dfrac{\|u\|_{\mathrm{op}}^n}{n!}$ pour n entier. La convergence suit d'après le critère de d'Alembert d'où la convergence absolue de la série. □

Proposition 5 (À savoir refaire). *Soit* $(x_n)_n \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ *vérifiant*

$$\exists k \in [\,0\,;1\,[\quad | \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant k\|x_n - x_{n-1}\|$$

Alors, la suite $(x_n)_n$ *converge.*

Démonstration. Par récurrence immédiate, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant k^n \|x_1 - x_0\|$$

Par comparaison, la série $\sum [x_{n+1} - x_n]$ converge absolument donc converge et par théorème sur les séries téléscopiques, la convergence de $(x_n)_n$ s'en déduit. □

Exemple important : Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ application *contractante*, *i.e.* il existe $k \in [\,0\,;1\,[$ tel que la fonction f est k-lipschitzienne. La fonction f admet un unique point fixe. On choisit $x_0 \in \mathrm{E}$ puis on pose $x_{n+1} = f(x_n)$ pour n entier. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leqslant k\|x_n - x_{n-1}\|$$

On en déduit $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \in \mathrm{E}$ et $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\alpha)$ par continuité de f. Par unicité de la limite, on conclut

$$\alpha = f(\alpha)$$

L'unicité découle immédiatement de la contractance de f. On dispose également d'une vitesse de convergence en observant pour n entier non nul

$$\|x_n - \alpha\| = \|f(x_{n-1}) - f(\alpha)\| \leqslant k\|x_{n-1} - \alpha\|$$

d'où $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|x_n - \alpha\| \leqslant k^n\|x_0 - \alpha\|$$

Application : Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ muni d'une norme subordonnée et $(\mathrm{X}_n)_n \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ définie par $\mathrm{X}_0 \in \mathrm{E}$ et $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n + \mathrm{B}$ avec $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$ et $\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{op}} < 1$. Alors la suite $(\mathrm{X}_n)_n$ converge. On peut aussi retrouver ce résultat en clonant la démarche d'une suite arithmético-géométrique numérique.

II Dérivation

1 Définitions

Pour $a \in \mathrm{I}$, l'ensemble $-a + \mathrm{I}$ est un intervalle contenant 0 et non réduit à $\{0\}$.

Définition 6. *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$. La fonction f est dite* dérivable *en $a \in \mathrm{I}$ si le taux d'accroissement $(-a + \mathrm{I}) \smallsetminus \{0\} \to \mathrm{E}, h \mapsto \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite pour $h \to 0$. On note $f'(a)$ cette limite appelée* vecteur dérivé *ou simplement* dérivée *de f en a. La fonction f est* dérivable à droite *en a si le taux d'accroissement admet une limite pour $h \to 0^+$ notée $f'_d(a)$ et appelée* vecteur dérivé *ou simplement* dérivé *de f en a à droite (respectivement* dérivable à gauche *en a si le taux d'accroissement admet une limite pour $h \to 0^-$ notée $f'_g(a)$).*

Proposition 6. *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ et $a \in \mathrm{I}$. On a*

$$f \text{ dérivable en } a \iff f \text{ dérivable à droite et à gauche en } a \text{ et } f'_d(a) = f'_g(a)$$

Démonstration. Immédiate. □

Proposition 7. *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$. On a*

$$f \text{ continue} \iff \forall i \in [\![1\,;\,p]\!] \qquad f_i \text{ continue}$$

puis avec $a \in \mathrm{I}$ $$f \text{ dérivable en } a \iff \forall i \in [\![1\,;\,p]\!] \qquad f_i \text{ dérivable en } a$$

et dans ce cas $$f'(a) = \sum_{i=1}^{p} f'_i(a) e_i$$

Démonstration. Immédiate par propriétés sur les limites. □

Proposition 8. *Soit $(\varepsilon_j)_{1 \leqslant j \leqslant q} \in \mathrm{E}^q$ et $(g_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ des fonctions de I dans $\mathbb{K}$. On note $g = \sum_{j=1}^{q} g_j \varepsilon_j$. Si les g_j sont continues, alors g l'est aussi. Si les g_j sont dérivables en $a \in \mathrm{I}$, alors g l'est aussi et $g'(a) = \sum_{j=1}^{q} g'_j(a) \varepsilon_j$.*

Démonstration. La continuité des g_j entraine celle de g par opération sur les limites. Puis, soit $h \in (-a + \mathrm{I}) \smallsetminus \{0\}$, si les g_j sont dérivables en a, il vient

$$\frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \sum_{j=1}^{q} \frac{g_j(a+h) - g_j(a)}{h} \varepsilon_j \xrightarrow[h \to 0]{} \sum_{j=1}^{q} g'_j(a) \varepsilon_j$$

d'où le résultat. □

Notation : On note $\mathscr{D}(\mathrm{I},\mathrm{E})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans E.

Exemples : 1. Pour $x:\mathrm{I}\to\mathbb{K}^n, t\mapsto(x_1(t),\dots,x_n(t))$, on a x dérivable si et seulement les x_i sont dérivables et dans ce cas $x'(t)=(x_1'(t),\dots,x_n'(t))$ pour tout $t\in\mathrm{I}$.
2. Pour $\mathrm{A}:\mathrm{I}\to\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), t\mapsto\big(a_{i,j}(t)\big)$, on a A dérivable si et seulement si les $a_{i,j}$ sont dérivables et dans ce cas $\mathrm{A}'(t)=\big(a_{i,j}'(t)\big)$ pour $t\in\mathrm{I}$.

Théorème 6. *Soit $f:\mathrm{I}\to\mathrm{E}$ et $a\in\mathrm{I}$. La fonction f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\mathrm{A}\in\mathrm{E}$ tel que*

$$f(x)\underset{x\to a}{=}f(a)+(x-a)\mathrm{A}+o(x-a)$$

et dans ce cas, on a $\mathrm{A}=f'(a)$.

Démonstration. Immédiate. □

Corollaire 1. *Soit $f:\mathrm{I}\to\mathrm{E}$ et $a\in\mathrm{I}$. Si f est dérivable en a, alors elle est continue en a.*

Démonstration. Immédiate. □

2 Propriétés

Proposition 9. *L'ensemble $\mathscr{D}(\mathrm{I},\mathrm{E})$ est un $\mathbb{K}$-ev et l'application $\mathscr{D}(\mathrm{I},\mathrm{E})\to\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathrm{E}), f\mapsto f'$ est linéaire.*

Démonstration. Conséquence immédiate de la proposition 7. □

Proposition 10. *Soit $f:\mathrm{I}\to\mathrm{E}$ dérivable en $a\in\mathrm{I}$, F un $\mathbb{K}$-ev normé et $\mathrm{L}\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. La fonction $\mathrm{L}(f):\mathrm{I}\to\mathrm{F}, x\mapsto\mathrm{L}(f(x))$ est dérivable en a avec $\mathrm{L}(f)'(a)=\mathrm{L}(f')(a)$.*

Démonstration. Soit $h\in(-a+\mathrm{I})\setminus\{0\}$. Par dérivabilité de f en a et continuité de L en tant qu'application linéaire sur un espace de dimension finie, il vient

$$\frac{\mathrm{L}(f)(a+h)-\mathrm{L}(f)(a)}{h}=\mathrm{L}\left(\tfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)\xrightarrow[h\to 0]{}\mathrm{L}(f')(a)$$

□

Exemple : Soit $\mathrm{A}:\mathrm{I}\to\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dérivable, alors $t\mapsto\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}(t))$ est dérivable avec

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}(t))=\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}'(t))$$

Proposition 11. *Soit $\mathrm{E},\mathrm{F},\mathrm{G}$ des $\mathbb{K}$-ev normés avec E et F de dimensions finies, $f:\mathrm{I}\to\mathrm{E}$, $g:\mathrm{I}\to\mathrm{F}$ dérivables en $a\in\mathrm{I}$ et $\mathrm{B}:\mathrm{E}\times\mathrm{F}\to\mathrm{G}$ bilinéaire. La fonction $\mathrm{B}(f,g):\mathrm{I}\to\mathrm{G}, x\mapsto\mathrm{B}(f(x),g(x))$ est dérivable en a avec*

$$\mathrm{B}(f,g)'(a)=\mathrm{B}(f',g)(a)+\mathrm{B}(f,g')(a)$$

Démonstration. Soit $h\in(-a+\mathrm{I})\setminus\{0\}$. Par bilinéarité de B, il vient

$$\tau(h)=\frac{\mathrm{B}(f,g)(a+h)-\mathrm{B}(f,g)(a)}{h}=\mathrm{B}\left(\tfrac{f(a+h)-f(a)}{h},g(a+h)\right)+\mathrm{B}\left(f(a),\tfrac{g(a+h)-g(a)}{h}\right)$$

Par dérivabilité (et donc continuité) de f et g en a et continuité de B en tant qu'application bilinéaire sur des espaces de dimension finie, on obtient

$$\tau(h)\xrightarrow[h\to 0]{}\mathrm{B}(f',g)(a)+\mathrm{B}(f,g')(a)$$

□

Proposition 12. *Soit* E *euclidien et* $f, g : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ *dérivables en* $a \in \mathrm{I}$*. La fonction* $\langle f, g\rangle : \mathrm{I} \to \mathrm{F}, x \mapsto \langle f(x), g(x)\rangle$ *est dérivable en* a *avec*

$$\langle f, g\rangle'(a) = \langle f', g\rangle(a) + \langle f, g'\rangle(a)$$

Démonstration. Conséquence immédiate du résultat précédent. □

Proposition 13. *Soit* $\mathrm{E}_1, \ldots \mathrm{E}_p$*, et* F *des* $\mathbb{K}$*-ev normés avec les* E_i *de dimensions finies,* $f_i : \mathrm{I} \to \mathrm{E}_i$ *dérivable en* $a \in \mathrm{I}$ *pour tout* $i \in [\![1\,; p]\!]$ *et* $\mathrm{M} : \prod_{i=1}^{p} \mathrm{E}_i \to \mathrm{F}$ *application* p*-linéaire. La fonction* $\mathrm{M}(f_1, \ldots, f_p) : \mathrm{I} \to \mathrm{F}, x \mapsto \mathrm{M}(f_1(x), \ldots, f_p(x))$ *est dérivable en* a *avec*

$$\mathrm{M}(f_1, \ldots, f_p)'(a) = \mathrm{M}(f_1', f_2, \ldots, f_p)(a) + \mathrm{M}(f_1, f_2', \ldots, f_p)(a) + \ldots + \mathrm{M}(f_1, \ldots, f_p')(a)$$

Démonstration. On procède par récurrence sur p. L'initialisation pour $p = 1$ est la proposition 10. Considérons la configuration pour $p + 1$ avec p entier non nul et supposons le résultat vrai au rang p. On pose

$$\forall h \in (-a + \mathrm{I}) \smallsetminus \{0\} \qquad \tau(h) = \frac{1}{h}\left[\mathrm{M}(f_1, \ldots, f_{p+1})(a + h) - \mathrm{M}(f_1, \ldots, f_{p+1})(a)\right]$$

On a pour $h \in (-a + \mathrm{I}) \smallsetminus \{0\}$

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \mathrm{M}\left(f_1(a+h), \ldots, f_p(a+h), \tfrac{f_{p+1}(a+h) - f_{p+1}(a)}{h}\right) \\ &\quad + \frac{1}{h}\left[\mathrm{M}(f_1, \ldots, f_p, f_{p+1}(a))(a+h) - \mathrm{M}(f_1, \ldots, f_{p+1}(a))(a)\right]\end{aligned}$$

Par continuité des f_i et de M en tant qu'application p-linéaire sur des espaces de dimension finie, il vient

$$\tau(h) \xrightarrow[h \to 0]{} \mathrm{M}(f_1(a), \ldots, f_p(a), f_{p+1}'(a)) + \mathrm{M}(f_1, \ldots, f_p, f_{p+1}(a))'(a)$$

l'hérédité suit ce qui clôt la récurrence. □

Application : Calcul de $\left(\prod_{i=1}^{p} f_i\right)'$ avec les $f_i : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ dérivables.

Proposition 14. *Soient* $\varphi : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ *dérivable en* $\alpha \in \mathrm{J}$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *non vide, non réduit à un point et* $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ *dérivable en* $a = \varphi(\alpha)$*. La fonction* $f \circ \varphi$ *est dérivable en* α *avec*

$$(f \circ \varphi)'(\alpha) = (\varphi' \cdot f' \circ \varphi)(\alpha)$$

Démonstration. On a $f \circ \varphi = \sum_{i=1}^{p} (f_i \circ \varphi)\, e_i$ et le résultat suit d'après la proposition 7. □

⚠ **Avertissement :** Le théorème de Rolle et son corollaire le théorème des accroissements finis sont faux dans un $\mathbb{R}$-ev E de dimension $p \geqslant 2$. Par exemple, on considère $f : t \mapsto \cos(t)\varepsilon_1 + \sin(t)\varepsilon_2$ avec $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une famille libre d'un $\mathbb{R}$-ev E. On a $f(0) = f(2\pi)$ mais f' ne s'annule pas sur $]\,0\,; 2\pi\,[$.

III Dérivations successives

1 Définitions

Soit n entier. Pour $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ qui est n fois dérivable, on définit $f^{(n)}$ par $f^{(0)} = f$ et $f^{(k+1)} = f^{(k)\prime}$ pour $k+1 \leqslant n$.

Définition 7. *Une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ est dite* de classe $\mathscr{C}^n$ *si f est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est continue et est dite* de classe $\mathscr{C}^\infty$ *si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout n entier. On note $\mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathrm{E})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ de I dans E et on a $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I},\mathrm{E}) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathrm{E})$.*

Dans ce qui suit, on a $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, sauf mention contraire.

Proposition 15. *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$. On a*

$$f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathrm{E}) \iff \forall i \in [\![1\,;p]\!] \qquad f_i \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathrm{E})$$

Dans ce cas, pour k entier avec $k \leqslant n$ $\;f^{(k)} = \sum\limits_{i=1}^{p} f_i^{(k)} e_i$

Démonstration. Par récurrence avec la proposition 7. □

Théorème 7. *L'espace $\mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathrm{E})$ est un $\mathbb{K}$-ev et pour n entier, l'application $\mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathrm{E}) \to \mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathrm{E}), f \mapsto f^{(n)}$ est linéaire.*

Démonstration. Conséquence de la proposition 15 avec la linéarité de la dérivation d'ordre n pour des fonctions numériques (appliquée aux fonctions coordonnées). □

2 Propriétés

Soit n entier.

Proposition 16. *Soient $f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathrm{E})$, F un $\mathbb{K}$-ev normé et $\mathrm{L} \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On a $\mathrm{L}(f) \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathrm{F})$ et $\mathrm{L}(f)^{(n)} = \mathrm{L}(f^{(n)})$.*

Démonstration. Par récurrence avec la proposition 10 et la continuité de $\mathrm{L}(f^{(n)})$ comme composée d'applications continues. □

Proposition 17. *Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-ev normés avec E et F de dimensions finies, $f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathrm{E})$, $g \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathrm{F})$ et $\mathrm{B} : \mathrm{E} \times \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ bilinéaire. La fonction $\mathrm{B}(f,g) : \mathrm{I} \to \mathrm{G}, x \mapsto \mathrm{B}(f(x),g(x))$ est de classe $\mathscr{C}^n$ et pour n entier*

$$\mathrm{B}(f,g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{B}(f^{(k)}, g^{(n-k)})$$

Démonstration. Par récurrence avec la proposition 11 (preuve identique à celle de la formule de Leibniz) et continuité de $\mathrm{B}(f,g)^{(n)}$ comme combinaison de composées de fonctions continues ($\mathrm{B} \circ (f^{(k)}, g^{(n-k)})$ avec $k \in [\![0\,; n]\!]$). □

Proposition 18. *Soient $f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathrm{E})$ et $g \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathbb{K})$. La fonction gf est de classe $\mathscr{C}^n$ et pour n entier*

$$(gf)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)} f^{(n-k)}$$

Démonstration. Application immédiate de ce qui précède. □

IV Intégration sur un segment

La plupart des résultats énoncés ci-après s'obtiennent par héritage de l'intégrale « classique » (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) sur un segment. Dans ce qui suit, on note a et b des réels vérifiant $a \leqslant b$, sauf mention contraire.

1 Définitions

Définition 8. *Soit $f \in \mathscr{F}([\,a\,;b\,],\mathrm{E})$. On dit que f est* continue par morceaux *sur $[\,a\,;b\,]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{i\in[\![0\,;\,n]\!]}$ de $[\,a\,;b\,]$, i.e. $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ telle que pour tout $i \in [\![0\,;\,n-1]\!]$, f est continue sur $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$ et f admet des limites en a_i^+ et a_{i+1}^-.*

Notations : On note $\mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,],\mathrm{E})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[\,a\,;b\,]$.

Vocabulaire : Pour $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,],\mathrm{E})$, une subdivision σ vérifiant la propriété décrite dans la définition 8 est dite *adaptée* à f. Il n'y pas unicité d'une telle subdivision : si σ est adaptée à f et σ une sous-suite de σ' subdivision de $[\,a\,;b\,]$ (on dit que σ' est plus fine que σ), alors la subdivision σ' est adaptée à f.

Définition 9. *Soit $f \in \mathscr{F}(\mathrm{I},\mathrm{E})$. On dit que f est* continue par morceaux *sur I si, pour tout $[\,a\,;b\,] \subset \mathrm{I}$, on a $f_{|[\,a\,;b\,]} \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,],\mathrm{E})$.*

Notations : On note $\mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathrm{E})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I.

Proposition 19. *Soit $f \in \mathscr{F}(\mathrm{I},\mathrm{E})$. On a*

$$f \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathrm{E}) \iff \forall i \in [\![1\,;\,p]\!] \qquad f_i \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{K})$$

Démonstration. Soit $[\,a\,;b\,] \subset \mathrm{I}$. Le sens direct est immédiat puisqu'une subdivision adaptée à $f_{|[\,a\,;b\,]}$ est adaptée aux fonctions coordonnées. Réciproquement, on considère σ une subdivision de $[\,a\,;b\,]$ telle que σ_i subdivision adaptée à $f_{i|[\,a\,;b\,]}$ est sous-suite de σ pour tout $i \in [\![1\,;\,p]\!]$. C'est une subdivision adaptée à toutes les restrictions des fonctions coordonnées sur $[\,a\,;b\,]$ et donc à $f_{|[\,a\,;b\,]}$. □

Définition 10. *Pour $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,],\mathrm{E})$, on définit l'intégrale de f sur $[\,a\,;b\,]$ noté $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{p} \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\, e_i$$

Notations : On note aussi $\displaystyle\int_{[\,a\,;b\,]} f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_a^b f$ pour l'intégrale de f sur $[\,a\,;b\,]$. Pour $f \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathrm{E})$ et $(a,b) \in \mathrm{I}^2$, on conserve la convention usuelle $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$ si $b \leqslant a$.

Proposition 20. *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,],\mathrm{E})$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas du choix d'une base de* E.

Démonstration. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in[\![1\,;p]\!]}$ et $\widetilde{\mathscr{B}} = (\widetilde{e_i})_{i\in[\![1\,;p]\!]}$ des bases de E. On note $\mathrm{P} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\widetilde{\mathscr{B}}$ matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\widetilde{\mathscr{B}}$ avec $\mathrm{P} = \big(p_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et $\mathrm{X}(t) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f(t)$ et $\widetilde{\mathrm{X}(t)} = \mathrm{mat}_{\widetilde{\mathscr{B}}} f(t)$ pour $t \in [\,a\,;b\,]$. On a $\mathrm{X}(t) = \mathrm{P}\widetilde{\mathrm{X}}(t)$ pour $t \in [\,a\,;b\,]$ par changement de base. Puis, il vient

$$\sum_{j=1}^{p}\int_a^b \widetilde{f_j}(t)\,\mathrm{d}t\widetilde{e_j} = \sum_{j=1}^{p}\int_a^b \widetilde{f_j}(t)\,\mathrm{d}t\sum_{i=1}^{p} p_{i,j}e_i = \sum_{i=1}^{p}\int_a^b\left(\sum_{j=1}^{p} p_{i,j}\widetilde{f_j}(t)\,\mathrm{d}t\right)e_i = \sum_{i=1}^{p}\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}te_i$$

ce qui prouve le résultat attendu. □

2 Propriétés

Proposition 21 (Linéarité). *L'application* $\mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,],\mathrm{E}) \to \mathrm{E}, f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est une application linéaire.*

Démonstration. Héritage de la linéarité de l'intégrale classique sur un segment. □

Proposition 22 (Chasles). *Soit* $f \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathrm{E})$*. On a*

$$\forall (a,b,c) \in \mathrm{I}^3 \qquad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Héritage de la relation de Chasles de l'intégrale classique sur un segment. □

Théorème 8 (Sommes de Riemann). *Soit* $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,],\mathrm{E})$*. On a*

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Immédiate par convergence des sommes de Riemann des fonctions coordonnées. □

Théorème 9 (Inégalité triangulaire). *Soit* $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,],\mathrm{E})$*. On a*

$$\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Soit n entier non nul. Par inégalité triangulaire classique, on a

$$\|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\| \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\|$$

Faisant tendre $n \to +\infty$, utilisant la continuité de la norme et la continuité par morceaux de la composée $\|\cdot\| \circ f$, le résultat suit. □

Théorème 10 (Changement de variables). *Soit* $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathrm{E})$ *et* $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathrm{J},\mathrm{I})$ *avec* J *intervalle de* $\mathbb{R}$ *non vide, non réduit à un point. On a*

$$\forall (\alpha,\beta) \in \mathrm{J}^2 \qquad \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\circ\varphi(u)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Démonstration. Héritage du théorème de changement de variables classique. □

Théorème 11 (Intégration par parties). *Soit $u \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ et $v \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathrm{E})$. On a*

$$\forall (a, b) \in \mathrm{I}^2 \qquad \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Héritage de l'intégration par parties classique. □

Proposition 23. *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathrm{E})$ et $\mathrm{L} \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ avec F un $\mathbb{K}$-ev normé. On a $\mathrm{L}(f) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathrm{Im}\ \mathrm{L})$ et*

$$\forall (a, b) \in \mathrm{I}^2 \qquad \mathrm{L}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \mathrm{L}(f)(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Soit $(a, b) \in \mathrm{I}^2$ avec $a \leqslant b$. L'application L est continue comme application linéaire sur E espace de dimension finie. Par suite, la composée $\mathrm{L}(f) = \mathrm{L} \circ f$ est continue par morceaux sur I. Par continuité de L, il vient

$$\mathrm{L}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{L}\left(\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{L}\left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

Puis, par linéarité de L et en utilisant de nouveau le théorème de convergence des sommes de Riemann, on obtient pour n entier non nul

$$\mathrm{L}\left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{L}(f)\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_a^b \mathrm{L}(f)(t)\,\mathrm{d}t$$

Le cas $a \geqslant b$ est identique. □

3 Intégrale fonction de sa borne supérieure

Théorème 12. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathrm{E})$ et $a \in \mathrm{I}$. La fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.*

Démonstration. Héritage du théorème fondamental d'analyse classique. □

Théorème 13. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathrm{E})$ et F une primitive de f. On a*

$$\forall (a, b) \in \mathrm{I}^2 \qquad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

Démonstration. Conséquence immédiate de ce qui précède puisque toute primitive est de la forme $x \mapsto \mathrm{C^{te}} + \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. □

Théorème 14 (Inégalité des accroissements finis). *Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathrm{E})$ avec $\|f'(t)\| \leqslant \mathrm{K}$ pour tout $t \in \mathrm{I}$. Alors*

$$\forall (a, b) \in \mathrm{I}^2 \qquad \|f(b) - f(a)\| \leqslant \mathrm{K}\,|b - a|$$

Démonstration. Soit $(a, b) \in \mathrm{I}^2$ avec $a \leqslant b$. D'après ce qui précède, on a $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$ d'où, par inégalité triangulaire

$$\|f(b) - f(a)\| = \|\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t\| \leqslant \int_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{K}(b - a)$$

Le cas $a \geqslant b$ est identique. □

V Formules de Taylor

Dans ce qui suit, on a n entier.

1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 15. *Soit* $f \in \mathscr{C}^{n+1}(\mathrm{I}, \mathrm{E})$*. On a*

$$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2 \qquad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n \,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Héritage de Taylor avec reste intégral classique. □

Remarque : Formule globale, résultat pour tout $(a,b) \in \mathrm{I}^2$.

2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 16. *Soit* $f \in \mathscr{C}^{n+1}(\mathrm{I}, \mathrm{E})$*. Si* $f^{(n+1)}$ *est bornée sur* I*, alors*

$$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2 \qquad \|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\| \leqslant \operatorname*{Sup}_{x \in \mathrm{I}} \|f^{(n+1)}(x)\| \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Démonstration. Par inégalité triangulaire sur Taylor avec reste intégral. □

Remarque : En pratique, souvent plus utile que Taylor reste-intégral. Sert à contrôler des quantités pour des études asymptotiques, pour des dominations (dans des théorèmes avec hypothèse de domination, etc.).

3 Formule de Taylor-Young

Théorème 17. *Soit* $f \in \mathscr{C}^{n}(\mathrm{I}, \mathrm{E})$*. On a*

$$\forall a \in \mathrm{I} \qquad f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Démonstration. Héritage de Taylor-Young classique. □

Remarque : Formule locale avec un petit o dont le comportement est connu au voisinage de a.