Feuille d'exercices n°36

Exercice 1 (**)

Soit n entier non nul, $x \in [\,0\,;1\,]$ et $f(t) = (x\mathrm{e}^t + 1 - x)^n$ pour tout t réel.

1. Déterminer le développement limité de f en zéro à l'ordre deux.
2. En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

Corrigé : 1. Avec le développement de exp à l'ordre 2, il vient

$$f(t) = \left(x\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)+1-x+\mathrm{o}(t^2)\right)^n = \left(1+xt+x\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)\right)^n$$

On pose $u = xt + x\dfrac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)$. On a $u \to 0$ pour $t \to 0$. Avec le développement usuel

$$(1+u)^n = 1 + nu + \frac{n(n-1)}{2}u^2 + \mathrm{o}(u^2)$$

On obtient $$\boxed{f(t) = 1 + nxt + (nx + n(n-1)x^2)\,\frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)}$$

2. Un développement du binôme donne

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\mathrm{e}^{kt}$$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ comme composée de telles fonctions et par dérivation

$$\forall (p,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R} \qquad f^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}k^p\mathrm{e}^{kt}$$

En particulier $\quad f'(0) = \sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \qquad f''(0) = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

D'après le théorème de Taylor-Young, on a

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2}t^2 + \mathrm{o}(t^2)$$

Par unicité du développement limité, on obtient

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx \quad \text{et} \quad f''(0) = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2}$$

Exercice 2 (**)

Déterminer $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) \qquad \text{avec} \quad f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$$

Corrigé : Pour n entier non nul, on pose $\mathrm{S}_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$. On a

$$\mathrm{S}_n^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) = \frac{2}{n^2}\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} f^2\left(\frac{k}{n}\right)$$

en séparant les termes diagonaux des autres et par symétrie des sommes hors diagonale. D'après le théorème de convergence des sommes de Riemann, on a

$$\mathrm{S}_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f^2\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)$$

On conclut $\boxed{\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}$

Exercice 3 (**)

Calculer $$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Corrigé : Par inégalité triangulaire, on obtient

$$\forall x>0 \qquad \left|\int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{2x}\frac{|\sin(t)|}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{2x}$$

Par encadrement $\boxed{\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$

Le procédé précédent ne permet pas de conclure pour $x\to 0^+$. On a $\sin(t)\simeq t$ pour t proche de zéro et l'idée consiste donc à contrôler l'écart entre $\sin(t)$ et t. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange et une inégalité de concavité, on a

$$\forall t\in\mathbb{R} \qquad t-\frac{t^2}{2} \leqslant \sin(t) \leqslant t$$

Par suite $$\forall x>0 \qquad \int_x^{2x}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

c'est-à-dire $$\forall x>0 \qquad \ln(2)-x \leqslant \int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \ln(2)$$

Par encadrement $\boxed{\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} \ln(2)}$

Remarque : On peut éviter le recours à l'inégalité de concavité. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\forall t\in\mathbb{R} \qquad t-\frac{t^2}{2} \leqslant \sin(t) \leqslant t+\frac{t^2}{2}$$

ce qui est un peu moins bon que précédemment mais suffit pour conclure.

Exercice 4 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^2([0;1],\mathbb{R})$. Montrer

$$n\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f(1)-f(0)}{2}$$

Corrigé : On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \Delta_n = n\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Soit n entier non nul. On a $\quad \Delta_n = n\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\,\mathrm{d}t$

puis, on obtient $\quad \Delta_n = n\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(t-\frac{k}{n}\right)\right]\,\mathrm{d}t + \mathrm{U}_n$

avec
$$\mathrm{U}_n = n\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(t-\frac{k}{n}\right)\,\mathrm{d}t$$

Par convergence des sommes de Riemann avec f' continue sur $[0;1]$, il vient

$$\mathrm{U}_n = n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f(1)-f(0)}{2}$$

Et, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange

$$\forall t \in \left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right] \qquad \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(t-\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \|f''\|_\infty \frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2$$

On en déduit après intégration et sommation

$$\Delta_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) + \mathrm{U}_n$$

On conclut
$$\boxed{n\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f(1)-f(0)}{2}}$$

Exercice 5 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}([0;1],\mathrm{E})$ avec E euclidien. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour avoir

$$\left\|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right\| = \int_0^1 \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Corrigé : Si $f(t) = \varphi(t)u$ avec $\varphi \in \mathscr{C}([0;1],\mathbb{R}_+)$ et $u \in \mathrm{E}$ normé, l'égalité a clairement lieu et on a $u = \dfrac{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 \|f(t)\|_2\,\mathrm{d}t}$ si $f \neq 0$. Réciproquement, on suppose $f \neq 0$ et on pose u comme trouvé précédemment. Il vient, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left\|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right\| = \left\langle u, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right\rangle = \int_0^1 \langle u, f(t)\rangle\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Par suite $$\int_0^1 [\|f(t)\| - \langle u, f(t)\rangle]\,\mathrm{d}t = 0$$

et l'intégrande est continue, positive donc identiquement nul d'où l'égalité dans Cauchy-Schwarz ce qui signifie que $f(t)$ est positivement colinéaire à u. On conclut

$$\boxed{\text{L'égalité a lieu si et seulement si } f = \varphi \cdot u \text{ avec } u \in \mathrm{E} \text{ normé et } \varphi \in \mathscr{C}([\,0\,;1\,], \mathbb{R}_+).}$$

Exercice 6 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^2([\,0\,;1\,], \mathrm{E})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. On suppose

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0 \quad \text{et} \quad \|f(1)\| = 1$$

Montrer $$\|f''\|_\infty \geqslant 4$$

Corrigé : Par inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\begin{cases} \|f\left(\dfrac{1}{2}\right) - f(0) - f'(0)\dfrac{1}{2}\| \leqslant \dfrac{1}{8}\|f''\|_\infty \\ \|f\left(\dfrac{1}{2}\right) - f(1) + f'(1)\dfrac{1}{2}\| \leqslant \dfrac{1}{8}\|f''\|_\infty \end{cases}$$

d'où $$\|f\left(\frac{1}{2}\right)\| + \|f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1)\| \leqslant \frac{1}{4}\|f''\|_\infty$$

et par inégalité triangulaire

$$1 = \|f(1)\| \leqslant \|f\left(\frac{1}{2}\right)\| + \|f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1)\| \leqslant \frac{1}{4}\|f''\|_\infty$$

Ainsi $$\boxed{\|f''\|_\infty \geqslant 4}$$

Exercice 7 (****)

On pose $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{P}_n = \prod\limits_{k=0}^{n} (\mathrm{X} - k) \quad$ et $\quad \forall x \in \,]\,0\,;1\,[\quad f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x-k}$

1. Montrer que pour tout n entier non nul, le polynôme P_n' admet une unique racine x_n sur $]\,0\,;1\,[$.
2. Pour n entier non nul, préciser la valeur de $f_n(x_n)$.
3. Établir $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{x_n} \leqslant \dfrac{1}{1-x_n} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k}$
4. En déduire un équivalent simple de x_n pour $n \to +\infty$.
5. Établir $\quad \forall u \in \left[\,0\,;\dfrac{1}{2}\,\right] \quad |\ln(1-u) + u| \leqslant 2u^2$
6. En déduire un équivalent simple de $|\mathrm{P}_n(x_n)|$ pour $n \to +\infty$.

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. Pour $k \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$, d'après le théorème de Rolle appliqué à $x \mapsto \mathrm{P}_n(x)$ fonction de classe $\mathscr{C}^1$ (polynomiale), il existe $\alpha_k \in \,]\,k\,;k+1\,[$ tel que $\mathrm{P}_n'(\alpha_k) = 0$. Ainsi, on a $0 < \alpha_0 < 1 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{n-1} < n$ donc P_n' de degré n admet n racines distinctes ce qui prouve que P_n' est scindé à racines simples et notant $u_n = \alpha_0$, on conclut

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*, \text{ le polynôme } \mathrm{P}_n' \text{ admet une unique racine } x_n \in \,]\,0\,;1\,[.}$$

2. Soit n entier non nul. Comme P_n est scindé à racines simples, on dispose de la décomposition en éléments simples

$$\frac{\mathrm{P}_n'}{\mathrm{P}_n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathrm{X} - k}$$

Ainsi $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad f_n(x_n) = \frac{\mathrm{P}_n'(x_n)}{\mathrm{P}_n(x_n)} = 0}$$

3. Soit n entier non nul. On a

$$f_n(x_n) = 0 \iff \frac{1}{x_n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - x_n} = 0 \iff \frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - x_n}$$

Comme on a $u_n \in \,]\,0\,;1\,[$, on en déduit

$$\forall k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{k - x_n} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![\,2\,;\,n\,]\!] \qquad \frac{1}{k - x_n} \leqslant \frac{1}{k-1}$$

D'où $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{x_n} \leqslant \frac{1}{1 - x_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}}$$

4. Par comparaison série/intégrale, on montre $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$ d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$ et par comparaison, il s'ensuit que $\dfrac{1}{x_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$ d'où $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Par conséquent, en observant que $\dfrac{1}{1 - x_n} = \mathrm{o}(\ln n)$, on obtient

$$\frac{1}{x_n} = \ln n + \mathrm{o}(\ln(n))$$

D'où $$\boxed{x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}}$$

5. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\forall u \in \left[\,0\,;\frac{1}{2}\right] \qquad |\ln(1-u) + u| \leqslant \operatorname*{Sup}_{t \in \left[\,0\,;\frac{1}{2}\,\right]} \frac{1}{(1-t)^2} \times \frac{|u - 0|^2}{2}$$

Ainsi $$\boxed{\forall u \in \left[\,0\,;\frac{1}{2}\right] \qquad |\ln(1-u) + u| \leqslant 2u^2}$$

6. Comme $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, on a $x_n \in \left[\,0\,;\dfrac{1}{2}\right]$ pour n assez grand puis

$$|\mathrm{P}_n(x_n)| = x_n \prod_{k=1}^{n} (k - x_n) = x_n n! \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x_n}{k}\right)$$

Puis $$\forall k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad -\frac{x_n}{k} - 2\frac{x_n^2}{k^2} \leqslant \ln\left(1 - \frac{x_n}{k^2}\right) \leqslant -\frac{x_n}{k} + 2\frac{x_n^2}{k^2}$$

Après sommation, on obtient

$$-x_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2x_n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \ln \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x_n}{k}\right) \leqslant -x_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2x_n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Avec $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ et $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \mathrm{O}(1)$, il vient par encadrement

$$\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x_n}{k}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$$

On conclut

$$\boxed{|\mathrm{P}_n(x_n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{\mathrm{e}\ \ln(n)}}$$