

Feuille d'exercices n°34

Exercice 1 (*)

En considérant la dérivée n -ième de l'application polynomiale $x \mapsto x^{2n}$, déterminer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 2 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn de dimension finie. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k |x - y|^\alpha$$

avec $k > 0$ et $\alpha > 1$.

Exercice 3 (*)

Soit $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad M(t)^\top M(t) = I_{2n+1}$$

Montrer que $M'(t) \notin \text{GL}_{2n+1}(\mathbb{R})$ pour tout t réel.

Exercice 4 (**)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ avec ℓ un réel. Montrer que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$. Chercher un contre-exemple pour la réciproque.

Exercice 5

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x) - f(y) = (x - y)f'\left(\frac{x + y}{2}\right)$$

Indication : utiliser la bijection $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x + y, x - y)$.

Exercice 6 (**)

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. Soit $f : t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ avec $\|f(t)\| = 1$ pour tout $t \in I$ et $g : t \mapsto (-y(t), x(t))$. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ tel que

$$f' = \gamma g \quad \text{et} \quad g' = -\gamma f$$

Exercice 7 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn de dimension finie, $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ dérivable en zéro et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) = 2f(x)$$

Montrer que f est linéaire.

Exercice 8 (**)

1. Soit n entier non nul. Montrer que

$$\forall p \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^p = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^n = (-1)^n n!$$

Indication : on pourra considérer $\varphi(x) = (1 - e^x)^n$ pour x réel.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ avec $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. Calculer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k f(hk)$.

Exercice 9 (*)

Soit $M \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ avec $M(t) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ pour tout $t \in [0; 1]$. Montrer

$$\left\| \int_0^1 M(t) dt \right\|_2 \leq \sqrt{n}$$

Exercice 10 (**)

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{2n} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

Exercice 11 (**)

Déterminer des majorations pour les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. \left| \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \right| & 2. \left| \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \right| & 3. \left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \\ \text{pour } x \text{ réel} & \text{pour } x \text{ réel} & \text{pour } x \geq 0 \end{array}$$

Exercice 12 (**)

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k + (-1)^k}{n^2}\right)$$