

Feuille d'exercices n°36

Exercice 1 (**)

Soit n entier non nul, $x \in [0; 1]$ et $f(t) = (xe^t + 1 - x)^n$ pour tout t réel.

1. Déterminer le développement limité de f en zéro à l'ordre deux.
2. En déduire $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ et $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

Indications : 2. Déterminer une nouvelle écriture de f plus adaptée au calcul de $f'(0)$ et $f''(0)$.

Exercice 2 (**)

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right)$ avec $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$

Indications : Considérer $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2$ et dissocier dans la somme double les termes diagonaux des autres.

Exercice 3 (**)

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$

Indications : Utiliser l'inégalité triangulaire pour la limite en $+\infty$ et l'inégalité de Taylor-Lagrange pour la limite en 0^+ .

Exercice 4 (***)

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0; 1], \mathbb{R})$. Montrer

$$n \int_0^1 f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{f(1) - f(0)}{2}$$

Indications : Écrire $n \int_0^1 f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ sous forme de somme d'intégrales puis faire apparaître un développement de Taylor à l'ordre 1.

Exercice 5 (***)

Soit $f \in \mathcal{C}([0; 1], E)$ avec E euclidien. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour avoir

$$\left\| \int_0^1 f(t) dt \right\| = \int_0^1 \|f(t)\| dt$$

Indications : Procéder par analogie avec le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6 (***)

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0; 1], \mathbb{E})$ avec $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. On suppose

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0 \quad \text{et} \quad \|f(1)\| = 1$$

Montrer

$$\|f''\|_{\infty} \geq 4$$

Indications : Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Exercice 7 (****)

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n = \prod_{k=0}^n (X - k) \quad \text{et} \quad \forall x \in]0; 1[\quad f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{x - k}$

1. Montrer que pour tout n entier non nul, le polynôme P'_n admet une unique racine x_n sur $]0; 1[$.
2. Pour n entier non nul, préciser la valeur de $f_n(x_n)$.

3. Établir $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{1 - x_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

4. En déduire un équivalent simple de x_n pour $n \rightarrow +\infty$.

5. Établir $\forall u \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \quad |\ln(1 - u) + u| \leq 2u^2$

6. En déduire un équivalent simple de $|P_n(x_n)|$ pour $n \rightarrow +\infty$.

Indications : 2. Écrire la décomposition en éléments simples de $\frac{P'_n}{P_n}$.

3. Isoler le premier terme de la somme $f_n(x_n)$ et utiliser le fait que $x_n \in]0; 1[$.

5. Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange.

6. Factoriser $x_n n!$ dans l'écriture de $|P_n(x_n)|$ puis considérer le logarithme du produit restant et utiliser l'inégalité établie à la question précédente.