

Feuille d'exercices n°28

Exercice 1 (*)

Soit $E = \mathbb{R}^2$. Représenter les boules unités fermées pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Corrigé : On obtient

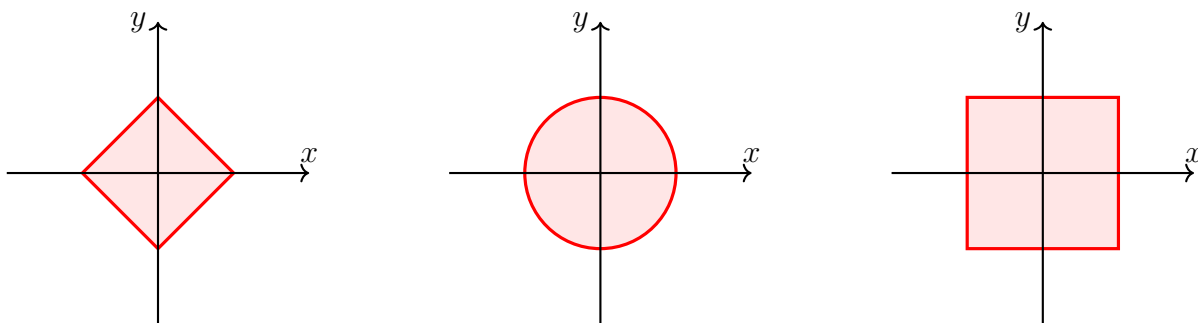


FIGURE 1 – Boules unités ouvertes pour $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$

Exercice 2 (*)

Dans $\mathbb{R}^n$, montrer que les pavés ouverts sont des ouverts et que les pavés fermés sont des fermés.

Corrigé : Soit $U = \prod_{i=1}^n]a_i; b_i[$ avec $a_i < b_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, bornes éventuellement infinies.

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, les applications $\varphi_i : x \mapsto x_i$ avec $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ sont polynomiales donc continues. Un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert (c'est une boule ouverte) et en écrivant

$U = \bigcap_{i=1}^n \varphi_i^{-1}(]a_i; b_i[)$, comme l'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert et qu'une intersection finie d'ouverts est un ouvert, on conclut que U est un ouvert.

Pour $F = \prod_{i=1}^n [a_i; b_i]$, on écrit $F = \bigcap_{i=1}^n \varphi_i^{-1}([a_i; b_i])$. Comme un segment est un fermé (c'est une

boule fermée), que l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé et qu'une intersection de fermés est un fermé, il s'ensuit que F est un fermé. Ainsi

Dans $\mathbb{R}^n$, les pavés ouverts sont des ouverts et les pavés fermés des fermés.

Exercice 3 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn et A, B des parties de E avec A ou B ouvert. Montrer que $A + B$ est un ouvert.

Corrigé : Supposons A ouvert. On a $A + B = \bigcup_{b \in B} (b + A)$. Montrer que pour $b \in B$, on a $b + A$

ouvert. Soit $x \in b + A$, autrement dit $x = b + a$ avec $a \in A$. Comme A est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$. Par suite, pour $y \in B(x, r)$, notant $u = y - b - a$, on a $\|u\| < r$ puis

$$y = b + a + u \in b + B(a, r) \subset b + A$$

autrement dit

$$B(x, r) \subset b + A$$

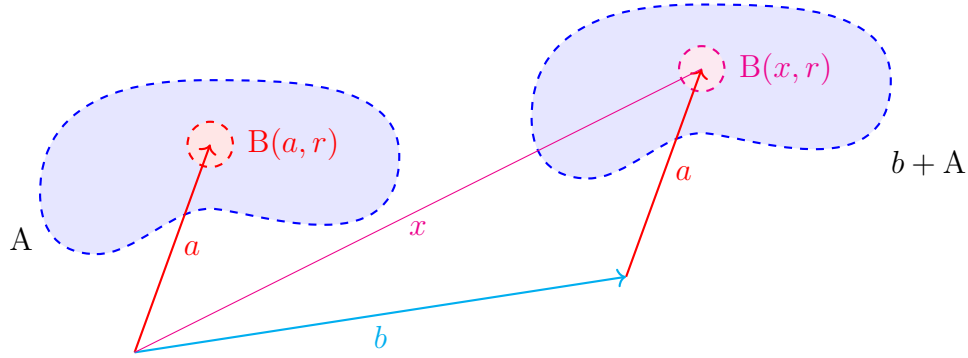


FIGURE 2 – Ouvert $b + A$

Ceci prouve que $b + A$ est ouvert pour tout $b \in B$ et comme une union d'ouverts est un ouvert, on conclut

L'ensemble $A + B$ est ouvert.

Exercice 4 (*)

Soit A une partie de E . Déterminer $\partial(E \setminus A)$.

Corrigé : On a

$$\partial(E \setminus A) = \overline{E \setminus A} \setminus (E \setminus A)^\circ = (E \setminus \overset{\circ}{A}) \setminus (E \setminus \bar{A}) = (E \setminus \overset{\circ}{A}) \cap (E \setminus (E \setminus \bar{A})) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$$

Ainsi

$$\partial(E \setminus A) = \partial A$$

Exercice 5 (**)

Déterminer l'intérieur d'une sphère.

Corrigé : Soit E un $\mathbb{K}$ -evn, $a \in E$ et $r \geq 0$. Si $r = 0$, alors $S(a, r) = \{a\}$ est d'intérieur vide. Supposons $r > 0$. Soit $x \in S(a, r)^\circ$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset S(a, r)$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n = a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(x - a)$$

On a $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ d'où $x_n \in B(x, \varepsilon)$ pour n assez grand et $\|x_n - a\| < \|x - a\| = r$ ce qui prouve que $x_n \notin S(a, r)$. On conclut

L'intérieur d'une sphère est vide.

Exercice 6 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn et A, B des parties de E .

1. Si $A \subset B$, comparer $\overset{\circ}{A}$ avec $\overset{\circ}{B}$ et $\bar{A}$ avec $\bar{B}$.
2. Comparer $(A \cup B)^\circ$ avec $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ puis $(A \cap B)^\circ$ avec $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

3. Même question pour l'adhérence.

Corrigé : 1. Pour $x \in \overset{\circ}{A}$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A \subset B$ d'où $x \in \overset{\circ}{B}$. Pour $x \in \bar{A}$, on a $B(x, r) \cap B \supset B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $r > 0$. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } A \subset B, \text{ on a } \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B} \text{ et } \bar{A} \subset \bar{B}.}$$

2. On a $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ d'où

$$\boxed{\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset (A \cup B)^\circ}$$

Avec $A =]-1; 0]$ et $B = [0; 1[$, on a $(A \cup B)^\circ =]-1; 1[$ et $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} =]-1; 1[\setminus \{0\}$. Avec $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, on trouve $(A \cap B)^\circ \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. Soit $x \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. Il existe des boules ouvertes $B(x, r) \subset A$ et $B(x, s) \subset B$. Notant $\eta = \min(r, s)$, on a $B(x, \eta) \subset A \cap B$ d'où $x \in (A \cap B)^\circ$. Ainsi

$$\boxed{\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = (A \cap B)^\circ}$$

Variante : Pour $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset (A \cap B)^\circ$, on peut remarquer que $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ est un ouvert inclus dans $A \cap B$ d'où l'inclusion souhaitée par maximalité de l'intérieur comme ouvert contenu dans la partie considérée.

3. Par complémentarité, on obtient

$$\boxed{\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}}$$

Avec $A = [-1; 0[$ et $B =]0; 1]$, on a $\bar{A} \cap \bar{B} = \{0\}$ tandis que $\overline{A \cap B} = \emptyset$. On peut aussi considérer le complémentaire de l'exemple précédent (moins agréable).

Exercice 7 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn et F un fermé de E .

1. Montrer que F peut s'écrire comme image réciproque d'un fermé par une application continue de E dans $\mathbb{R}$.
2. En déduire que F peut s'écrire comme intersection décroissante d'ouverts de E .

Corrigé : 1. On considère $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto d(x, F)$. L'application φ est continue car 1-lipschitzienne et on a

$$\boxed{F = \varphi^{-1}(\{0\}) = \varphi^{-1}(]-\infty; 0])}$$

2. En s'inspirant du résultat précédent, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n = \varphi^{-1}\left(]-\infty; \frac{1}{n}[\right)$$

Les U_n sont des ouverts en tant qu'images réciproques d'ouverts par une application continue. Puis, on a

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n = \varphi^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}]-\infty; \frac{1}{n}[\right) = \varphi^{-1}(]-\infty; 0]) = \varphi^{-1}(\{0\}) = F$$

La décroissance des U_n est évidente et on a donc montré

$$\boxed{\text{Tout fermé de } E \text{ peut s'écrire comme intersection décroissantes d'ouverts.}}$$

Exercice 8 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn et F un sev de E .

1. Montrer que $\bar{F}$ est un sev de E .
2. Montrer qu'un hyperplan est soit dense, soit fermé.

Corrigé : 1. On a $0 \in F \subset \bar{F}$. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_n)_n, (y_n)_n$ dans $F^{\mathbb{N}}$ avec $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ et $y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y$.
On a $(\lambda x_n + y_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ et

$$\lambda x_n + y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda x + y \in \bar{F}$$

Ainsi

L'ensemble $\bar{F}$ est un sev de E .

2. Supposons $\bar{H} \neq H$. Soit $x_0 \in \bar{H} \setminus H$. Comme H est un hyperplan, on a

$$E = H \oplus \text{Vect}(x_0) \subset \bar{H} \subset E$$

Ainsi

Dans un $\mathbb{K}$ -ev, un hyperplan est soit dense, soit fermé.

Exercice 9 (**)

Montrer la continuité de l'application qui à $M \in GL_n(\mathbb{K})$ associe son inverse.

Corrigé : Il s'agit de l'application définie par

$$\forall M \in GL_n(\mathbb{K}) \quad M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \text{Com}(M)^{\top}$$

Le déterminant est polynomial en les coefficients de la matrice donc les coordonnées de la co-matrice également et par conséquent, les coordonnées de l'inverse sont fonctions rationnelles des coefficients de la matrice. Par conséquent

L'inverse matricielle est une application continue.

Exercice 10 (**)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$.

1. Déterminer une norme sur E telle que le produit dans E soit continu.
2. Pour E muni de $\|\cdot\|_1$, le produit est-il continu ?

Corrigé : Le produit $E^2 \rightarrow E, (f, g) \mapsto fg$ est une application bilinéaire sur E^2 à valeurs dans E . Ainsi, le produit dans E est continu si et seulement s'il existe $C \geq 0$ telle que

$$\forall (f, g) \in E^2 \quad \|fg\| \leq C \|f\| \|g\|$$

1. Munissons E de $\|\cdot\|_{\infty}$. Soit $(f, g) \in E^2$. On a

$$\forall t \in [0; 1] \quad |(fg)(t)| = |f(t)| |g(t)| \leq \|f\|_{\infty} \|g\|_{\infty}$$

d'où

$$\|fg\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} \|g\|_{\infty}$$

Par conséquent

Dans E muni de $\|\cdot\|_{\infty}$, le produit est continu.

2. Pour n entier, on pose $f_n : t \mapsto t^n$. On a

$$\frac{\|f_n^2\|_1}{\|f_n\|_1^2} = \frac{(n+1)^2}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

ce qui contredit l'existence d'une constante $C \geq 0$ vérifiant pour tout $(f, g) \in E^2$

$$\|fg\|_1 \leq C\|f\|_1\|g\|_1$$

Ainsi

Le produit n'est pas continu dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

Remarque : L'ensemble $(E, +, \times, \cdot)$ est une algèbre. Le produit $\times$ est bilinéaire sur E^2 mais comme l'algèbre E n'est pas de dimension finie, la continuité n'est pas garantie et il n'y a donc pas de contradiction.

Exercice 11 (**)

L'application définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}[X]$ par $M \mapsto \pi_M$ est-elle continue ?

Corrigé : On suppose $n \geq 2$. L'application est définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ puis $\deg \pi_M \leq \deg \chi_M = n$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'espace d'arrivée est donc de dimension finie et le choix de la norme n'importe pas. Considérons $M_p = \frac{1}{p}E_{1,n}$ pour p entier non nul. On a $M_p^2 = 0$ et $M_p \neq 0$ d'où $\pi_{M_p} = X^2$ et $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ avec $\pi_0 = X$. Ainsi, on a

$$\pi_{M_p} = X^2 \not\xrightarrow{p \rightarrow +\infty} X = \pi_0$$

On conclut

L'application $M \mapsto \pi_M$ n'est pas continue.

Remarque : Pour $n = 1$, on a $M = (m)$ et $M \mapsto \pi_M = X - m$ est effectivement continue (mais ce cas des matrices scalaires n'est pas très intéressant).

Exercice 12 (**)

On pose

$$A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^* \right\} \quad B = A \cup \{0\}$$

Discuter de la nature topologique des ensembles A et B .

Corrigé : L'ensemble A n'est pas fermé : on a $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \notin A$. Les ensembles A et B ne sont pas ouverts puisqu'aucune boule ouverte centrée en 1 n'est contenu dans ces ensembles. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ avec et on a $B = \varphi^{-1}(\{0\})$ d'où

L'ensemble A n'est ni ouvert, ni fermé et l'ensemble B est fermé, non ouvert.

Exercice 13 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn.

1. Soit $a \in E$ et $r > 0$. Montrer $\text{Vect}(B(a, r)) = E$.
2. Montrer que tout sev strict de E est d'intérieur vide.

Corrigé : 1. Notons $F = \text{Vect}(B(a, r))$. Pour $u \in B(0, r)$, on a $u + a \in B(a, r)$ d'où

$$u = (u + a) - a \in F$$

autrement dit $B(0, r) \subset F$. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. On a

$$x = \frac{2\|x\|}{r} \underbrace{\frac{r}{2\|x\|}x}_{\in B(0, r)} \in \text{Vect}(B(0, r)) \subset F$$

ce qui prouve $E \subset F$. Ainsi

$$\boxed{\text{Vect}(B(a, r)) = E}$$

2. Soit $F \subsetneq E$. Si $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$, alors il existe $a \in F$ et $r > 0$ tels que $B(a, r) \subset F$ d'où $E = \text{Vect}(B(a, r)) \subset F$ ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{Tout sev strict de } E \text{ est d'intérieur vide.}}$$

Exercice 14 (*)

Étudier la continuité éventuelle des applications suivantes :

$$1. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad 2. f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^x - e^y}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ e^x & \text{sinon} \end{cases}$$

Corrigé : 1. On a $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x, x) = \frac{\sin x^2}{2x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$

Ainsi

$$\boxed{f \notin \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

2. On pose $\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Par construction, la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ et on observe que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = e^x \varphi(y - x)$$

Par composition de fonctions continues, on conclut

$$\boxed{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}$$

Exercice 15 (*)

On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = x^2 - xy + y^2$

Étudier si f admet une limite pour $\|(x, y)\| \rightarrow +\infty$.

Corrigé : Avec l'inégalité $xy \geq -\frac{x^2 + y^2}{2} \iff (x - y)^2 \geq 0$, on obtient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) \geq \frac{x^2 + y^2}{2} \xrightarrow{\|(x, y)\|_2 \rightarrow +\infty} +\infty$$

Ainsi

$$\boxed{f(x, y) \xrightarrow{\|(x, y)\| \rightarrow +\infty} +\infty}$$

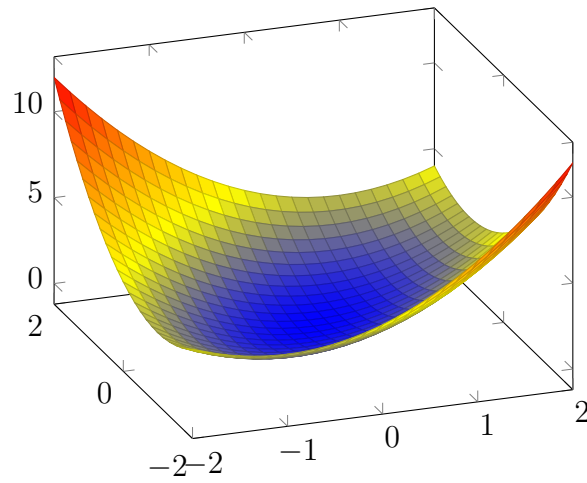


FIGURE 3 – Graphe de $z = f(x, y)$

Exercice 16 (*)

On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (x^2 - y^2)^2 - y^3 + xy$

Étudier si f admet une limite pour $\|(x, y)\| \rightarrow +\infty$.

Corrigé : On a $f(x, 0) = x^4 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $f(x, x) = -x^3 + x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$

Ainsi

La fonction f n'admet pas de limite pour $\|(x, y)\| \rightarrow +\infty$.