

Feuille d'exercices n°29

Exercice 1 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev normé, $a \in E$ et $r > 0$. Montrer $\overline{B(a, r)} = B_f(a, r)$.

Corrigé : On a $B(a, r) \subset B_f(a, r)$ d'où $\overline{B(a, r)} \subset B_f(a, r)$ par fermeture d'une boule fermée. Soit $x \in B_f(a, r)$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n = a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(x - a)$$

On a clairement $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ et $\|x_n - a\| < \|x - a\|$ d'où $\|x_n - a\| < r$ pour $n \geq 1$ ce qui prouve que la suite est à valeurs dans $B(a, r)$. Par caractérisation séquentielle de l'adhérence, on a $B_f(a, r) \subset \overline{B(a, r)}$ et on conclut

$$\boxed{\overline{B(a, r)} = B_f(a, r)}$$

Exercice 2 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn et $A \subset E$.

1. Montrer $A \text{ fermé} \iff \partial A \subset A$

2. Montrer $A \text{ ouvert} \iff A \cap \partial A = \emptyset$

Corrigé : 1. On a $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. Si A est fermé, alors $A = \bar{A}$ et le sens direct est immédiat. On a $A \cup \partial A = \bar{A}$. En effet, soit $x \in \bar{A}$. Si $x \in \overset{\circ}{A}$, alors $x \in A$ d'où $x \in A \cup \partial A$. Si $x \notin \overset{\circ}{A}$, alors $x \in \partial A$ d'où $x \in A \cup \partial A$ ce qui prouve $\bar{A} \subset A \cup \partial A$ et l'autre inclusion est immédiate. Par conséquent, si $\partial A \subset A$, alors $\bar{A} = A \cup \partial A = A$ et on conclut

$$\boxed{A \text{ fermé} \iff \partial A \subset A}$$

2. On a $E \setminus A \text{ fermé} \iff \partial(E \setminus A) \subset E \setminus A$

Or, on sait que $\partial A = \partial(E \setminus A)$ d'où

$$E \setminus A \text{ fermé} \iff \partial A \cap A = \emptyset$$

Ainsi

$$\boxed{A \text{ ouvert} \iff A \cap \partial A = \emptyset}$$

Exercice 3 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn et A, B deux parties non vides de E . On définit $d(A, B) = \inf_{(x, y) \in A \times B} \|x - y\|$.

Montrer $d(A, B) = d(\bar{A}, \bar{B})$

Corrigé : On a clairement $d(\bar{A}, \bar{B}) \leq d(A, B)$ puisque $A \times B \subset \bar{A} \times \bar{B}$. Soit $(a, b) \in \bar{A} \times \bar{B}$. Par caractérisation séquentielle, il existe $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_n \in B^{\mathbb{N}}$ telles que $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ et $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b$.

Or, on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad d(A, B) \leq \|a_n - b_n\|$

L'application $E^2 \rightarrow E, (x, y) \mapsto x - y$ est linéaire avec $\|x - y\| \leq \|(x, y)\|_1$ pour $(x, y) \in E^2$ d'où sa continuité et la norme étant également continue, il vient par passage à la limite $d(A, B) \leq \|a - b\|$ et comme ceci vaut pour tout $(a, b) \in \bar{A} \times \bar{B}$, par passage à la borne inférieure, on obtient

$$\boxed{d(A, B) = d(\bar{A}, \bar{B})}$$

Exercice 4 (***)

Soient A et B deux fermés disjoints de E un $\mathbb{K}$ -evn.

1. Trouver $f \in \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ tel que $f|_A = 0$ et $f|_B = 1$.
2. En déduire qu'il existe des ouverts U et V disjoints tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Corrigé : 1. On pose $\forall x \in E \quad f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$

L'application est bien définie car

$$d(x, A) + d(x, B) = 0 \iff x \in \bar{A} = A \quad \text{et} \quad x \in \bar{B} = B$$

ce qui est impossible puisque A et B sont disjoints. Il s'agit donc d'un quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. On a clairement $f(x) = 0$ pour $x \in A$ et

$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A)} = 1$ pour $x \in B$. On choisit donc

$$\boxed{\forall x \in E \quad f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}}$$

2. On pose $U = f^{-1}\left(] -\infty; \frac{1}{2} [\right)$ et $V = f^{-1}\left(] \frac{1}{2}; +\infty [\right)$. Les ensembles U et V sont ouverts comme images réciproques d'ouverts par une application continue. On a

$$A \subset f^{-1}(\{0\}) \subset f^{-1}\left(] -\infty; \frac{1}{2} [\right) = U \quad \text{et} \quad B \subset f^{-1}(\{1\}) \subset f^{-1}\left(] \frac{1}{2}; +\infty [\right) = V$$

et
$$U \cap V = f^{-1}\left(] -\infty; \frac{1}{2} [\cap] \frac{1}{2}; +\infty [\right) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

Ainsi $\boxed{\text{Il existe des ouverts disjoints } U \text{ et } V \text{ tels que } A \subset U \text{ et } B \subset V.}$

Exercice 5 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn et A une partie convexe de E . Montrer que $\bar{A}$ et $\mathring{A}$ sont convexes.

Corrigé :

Soit $(a, b) \in \mathring{A}^2$. Il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$ et $B(b, r) \subset A$ (on choisit le minimum des rayons pour chaque boule). Soit $\lambda \in [0; 1]$ et $x \in B(\lambda a + (1 - \lambda)b, r)$. On pose $u = x - \lambda a - (1 - \lambda)b$. On a donc $\|u\| < r$. Puis

$$x = \lambda a + (1 - \lambda)b + u = \lambda(a + u) + (1 - \lambda)(b + u)$$

avec

$$a + u \in B(a, r) \quad \text{et} \quad b + u \in B(b, r)$$

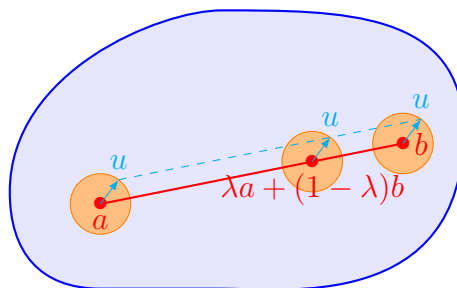


FIGURE 1 – Intérieur d'une partie convexe

On a donc $a+u \in A$ et $b+u \in A$ d'où $x \in A$ par convexité. Ceci prouve que $B(\lambda a + (1-\lambda)b, r) \subset A$. Soit $(a, b) \in \bar{A}^2$ et $\lambda \in [0; 1]$. Il existe $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ à valeurs dans A telles que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ et $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$. Par suite

$$\lambda a_n + (1-\lambda)b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda a + (1-\lambda)b \in \bar{A}$$

On conclut

Pour A convexe, les parties $\bar{A}$ et $\overset{\circ}{A}$ sont également convexes.

Exercice 6 (***)

Montrer qu'une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé.

Corrigé : Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Si φ est continue, alors $\text{Ker } \varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$ est un fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Supposons $\text{Ker } \varphi$ fermé. Si $\text{Ker } \varphi = E$, alors $\varphi = 0$ et le résultat suit. Supposons φ est discontinue. Pour tout $C \geq 0$, il existe $x \in E$ tel que $|\varphi(x)| > C\|x\|$. On peut donc construire une suite $(x_n)_n$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\varphi(x_n)| > n\|x_n\|$$

En particulier, on a $\varphi(x_n) \neq 0$ du fait de l'inégalité stricte ci-dessus. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad y_n = \frac{x_n}{\varphi(x_n)}$$

Pour $u \in E$, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = u - \varphi(u)y_n$$

La suite est à valeurs dans $\text{Ker } \varphi$ et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$. Par fermeture, on obtient $u \in \text{Ker } \varphi$ et ce pour tout $u \in E$ ce qui prouve la nullité de φ et contredit sa discontinuité. Ainsi

Une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé.

Exercice 7 (***)

Soit $E = \{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n| \text{ converge}\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ pour $u \in E$ et $\varphi \in \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique $(y_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bornée tel que $\varphi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n y_n$ pour tout $u \in E$.

Corrigé : On procède par analyse/synthèse.

• **Analyse :** On suppose l'existence de y . Soit k entier et $\delta_k = (\delta_{k,n})_n$. On a $\varphi(\delta_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_{k,n} y_n = y_k$. La suite $y = (y_n)_n = (\varphi(\delta_n))_n$ est donc déterminée de manière unique sous réserve d'existence.

• **Synthèse :** On choisit le y précédemment déterminé. L'application φ est linéaire continue donc lipschitzienne en 0, *i.e.* il existe $C \geq 0$ tel que

$$\forall u \in E \quad |\varphi(u)| \leq C\|u\|_1$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |y_n| = |\varphi(\delta_n)| \leq C\|\delta_n\|_1 = C$$

Soit N entier et $u \in E$. La série $\sum u_n y_n$ converge absolument. Par linéarité, on a

$$\varphi\left(\sum_{n=0}^N u_n \delta_n\right) = \sum_{n=0}^N \varphi(u_n \delta_n) = \sum_{n=0}^N \varphi(u_n \delta_n) = \sum_{n=0}^N u_n \varphi(\delta_n) = \sum_{n=0}^N u_n y_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n y_n$$

Enfin, comme le reste d'une série convergente est de limite nulle, il vient

$$\left\| \sum_{n=0}^N u\delta_n - u \right\|_1 = \left\| \sum_{n \geq N+1} u\delta_n \right\|_1 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

Par continuité, il en résulte
$$\varphi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n y_n$$

On conclut

Il existe un unique $(y_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bornée tel que $\varphi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n y_n$ pour tout $u \in E$.

Remarque : L'espace E est habituellement noté $\ell^1(\mathbb{N})$ et l'espace des suites bornées noté $\ell^\infty(\mathbb{N})$. L'ensemble des formes linéaires continues sur $\ell^1(\mathbb{N})$ est appelé *dual topologique* de $\ell^1(\mathbb{N})$ et noté $\ell^1(\mathbb{N})'$. On a démontré précédemment l'égalité

$$\ell^1(\mathbb{N})' \simeq \ell^\infty(\mathbb{N})$$

Exercice 8 (**)

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \chi_{AB} = \chi_{BA}$
3. Montrer $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{Com}(AB) = (\text{Com } A) (\text{Com } B)$

Corrigé : 1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $M - \frac{1}{p}I_n \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} M$ et comme χ_M admet un nombre fini de racines, on a $\chi_M\left(\frac{1}{p}\right) \neq 0$ pour p suffisamment grand ce qui signifie exactement que $M - \frac{1}{p}I_n \in GL_n(\mathbb{K})$ à partir d'un certain rang. On conclut

L'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Soit $(A, B) \in GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\begin{aligned} \chi_{AB} &= \det(XI_n - AB) = \det(A) \det(XA^{-1} - B) \\ &= \det(XA^{-1} - B) \det(A) = \det(XI_n - BA) = \chi_{BA} \end{aligned}$$

Or l'application $M \mapsto \chi_M$ est continue. En effet, on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \chi_M = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (X\delta_{i,\sigma(i)} - m_{i,\sigma(i)})$$

donc les coefficients de χ_M sont polynomiaux en les coefficients de M . Par densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et continuité de $A \mapsto \chi_{AB}$ et $A \mapsto \chi_{BA}$ (continuité des applications linéaires en dimension finie et de $M \mapsto \chi_M$), on conclut

$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad \chi_{AB} = \chi_{BA}$

3. On a $\forall M \in GL_n(\mathbb{K}) \quad \text{Com } M = \det(M) (M^\top)^{-1}$

Par suite $\forall (A, B) \in GL_n(\mathbb{K})^2 \quad \text{Com}(AB) = \text{Com}(A) \text{Com}(B)$

Par densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui implique la densité de $GL_n(\mathbb{K})^2$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et continuité de $M \mapsto \text{Com}(M)$ et du produit matriciel, on conclut

$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad \text{Com}(AB) = \text{Com}(A) \text{Com}(B)$

Exercice 9 (***)

Pour $n \geq 2$, on pose $\Delta = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \neq j \quad x_i \neq x_j\}$

Déterminer $\bar{\Delta}$ et $\overset{\circ}{\Delta}$.

Corrigé : Dans $E = \mathbb{R}^n$, on pose $\varphi_{i,j} : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x_j - x_i$ pour $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. On a

$$\Delta = \bigcap_{1 \leq i < j \leq n} \varphi_{i,j}^{-1}(\mathbb{R}^*)$$

On conclut

L'ensemble Δ est un ouvert.

Variante : Notant $\varphi = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \varphi_{i,j}$ polynomiale donc continue, on peut aussi écrire $\Delta = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$\forall k \geq 1 \quad x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) = x + \frac{1}{k}(1, 2, \dots, n)$$

Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$. Si $x_i = x_j$, alors pour $k \geq 1$, on a

$$x_i^{(k)} - x_j^{(k)} = \frac{i-j}{k} \neq 0$$

Si $x_i = x_j$, on a

$$x_i^{(k)} - x_j^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x_i - x_j \neq 0$$

d'où $x_i^{(k)} \neq x_j^{(k)}$ pour k assez grand. Ainsi, la suite $(x^{(k)})_k$ est à valeurs dans Δ à partir d'un certain rang et $x^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x$. On en déduit $\mathbb{R}^n \subset \bar{\Delta}$ et par conséquent

$$\bar{\Delta} = \mathbb{R}^n$$

Exercice 10 (***)

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}_n^s(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à valeurs propres simples est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. En déduire une nouvelle démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

Corrigé : 1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dispose de $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $T = P^{-1}MP$ est triangulaire. Définissons la suite de matrices triangulaires $(T_k)_k$ par

$$\forall k \geq 1 \quad T_k = T + \frac{1}{k} \text{diag}(1, \dots, n) = (t_{i,j}^{(k)})$$

Considérons les i -èmes et j -èmes termes diagonaux de T_k avec $i \neq j$. Si $t_{i,i} = t_{j,j}$, alors

$$t_{i,i}^{(k)} - t_{j,j}^{(k)} = t_{i,i} + \frac{i}{k} - t_{j,j} - \frac{j}{k} = \frac{i-j}{k} \neq 0$$

Si $t_{i,i} \neq t_{j,j}$, alors $t_{i,i}^{(k)} - t_{j,j}^{(k)} = t_{i,i} + \frac{i}{k} - t_{j,j} - \frac{j}{k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} t_{i,i} - t_{j,j} \neq 0$

Ainsi, comme il y a un nombre fini de couples $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, en choisissant k suffisamment grand, on peut garantir que les termes diagonaux de la matrice triangulaire T_k sont deux à deux distincts ce qui, par conséquent, la rend diagonalisable. Il vient par continuité du produit matriciel

$$PT_kP^{-1} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} PTP^{-1} = M$$

Par conséquent

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{D}_n^s(\mathbb{C}) \text{ est dense dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

2. L'application $M \mapsto \chi_M(M) = \sum_{k=0}^n a_k(M)M^k$ est continue. En effet, les puissances $M \mapsto M^k$ sont continues (à coefficients polynomiaux en les coefficients de M) et les coefficients $M \mapsto a_k(M)$ sont polynomiaux en les coefficients de M puisque

$$\chi_M = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (X\delta_{i,\sigma(i)} - m_{i,\sigma(i)})$$

Considérons $M \in \mathcal{D}_n^s(\mathbb{C})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé. Soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ une base de diagonalisation de u et $\text{Sp}(u) = \{\lambda_i, i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$. On a

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \chi_u(u)(\varepsilon_i) = \left[\bigcirc_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i\}} (u - \lambda_k \text{id}) \right] \circ (u - \lambda_i \text{id})(\varepsilon_i) = 0$$

Ainsi, l'endomorphisme $\chi_u(u)$ s'annule sur une base d'où

$$\forall M \in \mathcal{D}_n^s(\mathbb{C}) \quad \chi_M(M) = 0$$

La fonction nulle et la fonction continue $M \mapsto \chi_M(M)$ coïncident sur l'ensemble dense $\mathcal{D}_n^s(\mathbb{C})$ d'où

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \chi_M(M) = 0}$$

Exercice 11 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn.

1. Montrer que pour U, V ouverts, on a

$$\bar{U} = \bar{V} = E \implies \overline{U \cap V} = E$$

2. En déduire que pour F, G fermés, on a

$$\overset{\circ}{F} = \overset{\circ}{G} = \emptyset \implies (F \cup G)^\circ = \emptyset$$

Corrigé : 1. Soit $x \in E$ et $r > 0$. On a $B(x, r) \cap U \neq \emptyset$. Soit $y \in B(x, r) \cap U$. On a $B(x, r) \cap U$ ouvert comme intersection finie d'ouverts. Par suite, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(y, \varepsilon) \subset B(x, r) \cap U$. Comme $\bar{V} = E$, on a $B(y, \varepsilon) \cap V \neq \emptyset$ et comme $B(y, \varepsilon) \subset U$, il s'ensuit

$$B(y, \varepsilon) \cap (U \cap V) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad B(y, \varepsilon) \cap (U \cap V) \subset B(x, r) \cap (U \cap V)$$

Ainsi

$$\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap (U \cap V) \neq \emptyset$$

On conclut

$$\boxed{\bar{U} = \bar{V} = E \implies \overline{U \cap V} = E}$$

2. En considérant $U = E \setminus F$, $V = E \setminus G$ et après passage au complémentaire, on obtient

$$\boxed{\overset{\circ}{F} = \overset{\circ}{G} = \emptyset \implies (F \cup G)^\circ = \emptyset}$$

Exercice 12 (***)

Soit E un evn et $A \subset E$. Un point $x \in A$ est dit *isolé* s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$.

On note

$$\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^2 = I_n\}$$

1. Montrer que I_n est un point isolé de $\mathcal{S}$.
2. Déterminer tous les points isolés de $\mathcal{S}$.

Corrigé : 1. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée. Soit $A \in \mathcal{S}$ avec $A \neq I_n$. Il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ normé tel que $AX = -X$. Il en résulte que $\|A - I_n\| \geq 2$. On conclut

Le point I_n est isolé dans $\mathcal{S}$.

Variante : Supposons que I_n ne soit pas isolé dans $\mathcal{S}$. Alors, on peut trouver une suite $(A_k)_k \in (\mathcal{S} \setminus \{I_n\})^{\mathbb{N}}$ telle que $A_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} I_n$. Pour k entier, la matrice A_k est une matrice de symétrie différente de I_n d'où l'existence de $X_k \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A_k X_k = -X_k$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on norme les colonnes X_k . Ainsi, on a une suite à valeurs dans un compact. Quitte à extraire, on peut la supposer convergente avec $X_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} X$. Ainsi, on a $A_k X_k = -X_k$ pour tout k entier et par continuité du produit matriciel, il vient

$$A_k X_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} I_n X = -X \quad \text{avec} \quad X \neq 0$$

ce qui est absurde.

2. De la même manière, on montre que $-I_n$ est isolé dans $\mathcal{S}$. Considérons désormais A point isolé de $\mathcal{S}$ et supposons $A \neq \pm I_n$. Ainsi, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \text{diag}(I_r, -I_s)$. Pour k entier non nul, on pose

$$A_k = P \text{diag}(I_{r-1}, \begin{pmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, -I_{s-1}) P^{-1}$$

On vérifie sans difficulté que $A_k \in \mathcal{S}$ et par continuité du produit matriciel, on a $A_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} A$ ce qui contredit le caractère isolé de A . On conclut

Les points isolés de $\mathcal{S}$ sont $\pm I_n$.

Exercice 13 (***)

Soit n entier non nul et $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$. On note R_p l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang $\geq p$. Montrer que R_p est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Corrigé : Soit $A \in R_p$. Il existe une matrice de $GL_p(\mathbb{R})$ extraite de A . Notons $I \times J$ les plages d'indices de cette extraction et on pose

$$\Phi: \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathbb{K} \\ M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} & \longmapsto \det(m_{i,j})_{(i,j) \in I \times J} \end{cases}$$

L'ensemble $U = \Phi^{-1}(\mathbb{K}^*)$ est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue car polynomiale. On a clairement $A \in U$ et $U \subset R_p$ puisque pour une matrice de U , l'extraction sur les indices $I \times J$ fournit une matrice de $GL_p(\mathbb{K})$. Ainsi, l'ensemble U est un voisinage ouvert de A inclus dans R_p ce qui prouve que

L'ensemble R_p est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque : On note $\Lambda_p = \{(I, J) \subset \llbracket 1; n \rrbracket^2 \mid \text{Card } I = \text{Card } J = p\}$ et pour $(I, J) \in \Lambda_p$, on pose $M_{I,J} = (m_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ et $\varphi_{I,J}: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, M \mapsto \det(M_{I,J})$. On observe alors

$$R_p = \bigcup_{(I,J) \in \Lambda_p} \varphi_{I,J}^{-1}(\mathbb{K}^*)$$

ce qui prouve également l'ouverture de R_p .

Exercice 14 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn et $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_n$ est

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{X_n} \quad \text{avec} \quad X_n = \{x_k, k \geq n\}$$

Corrigé : Soit $\ell \in \Lambda$. On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad d(\ell, X_n) = 0$

d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \geq n \quad | \quad \|x_k - \ell\| \leq \varepsilon$

puis $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists p(n) \geq n \quad | \quad \|x_{p(n)} - \ell\| \leq \frac{1}{n+1}$

On pose $\varphi(0) = p(0)$ puis $\varphi(n+1) = \min\{p(\ell), \ell > \varphi(n)\}$ pour n entier. L'application φ ainsi construite est une injection strictement croissante qui vérifie $\|x_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \frac{1}{n}$ pour n entier non nul ce qui prouve que ℓ est valeur d'adhérence de $(u_n)_n$. Réciproquement, si ℓ est valeur d'adhérence de $(u_n)_n$, il existe une extractrice φ telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$. Pour n entier, comme $\varphi(n) \geq n$, on a $(x_{\varphi(k)})_{k \geq n}$ à valeurs dans X_n d'où $\ell \in \overline{X_n}$ et on conclut

L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ est Λ .

Exercice 15 (***)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -evn et $f : E \rightarrow F$. Montrer :

$$f \text{ continue} \iff \forall B \subset F \quad \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$$

Peut-on remplacer l'inclusion par une égalité ?

Corrigé : Supposons f continue. Soit $B \subset F$. Par théorème, l'adhérence $\overline{B}$ est fermée et son image réciproque par f est donc également un fermé. On a clairement $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\overline{B})$ et par conséquent $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$. Réciproquement, soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ avec $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Supposons que f n'est pas continue en x . Il existe donc une extractrice φ telle que $\|f(x_{\varphi(n)}) - f(x)\| \geq \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. Posons $B = \{f(x_{\varphi(n)}), n \in \mathbb{N}\}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{\varphi(n)} \in f^{-1}(B) \quad \text{et} \quad x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$$

Par caractérisation séquentielle, il s'ensuit

$$x \in \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$$

Autrement dit, il existe ψ extractrice telle que

$$f(x_{\varphi \circ \psi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

ce qui contredit le choix de φ . On conclut

$$f \text{ continue} \iff \forall B \subset F \quad \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$$

Considérons $f : x \mapsto x^+ = \max(x, 0)$ qui est continue sur $\mathbb{R}$. On a

$$f^{-1}(]0; +\infty[) =]0; +\infty[\quad \text{et} \quad f^{-1}([0; +\infty[) = \mathbb{R}$$

On ne peut donc pas remplacer l'inclusion par une égalité.