ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°35

Exercice 1 (***)

Étudier la nature de la suite $(\cos\sqrt{n})$.

Indication : considérer la sous-suite (n_k) avec $n_k = \lfloor (k\pi)^2 \rfloor$.

Exercice 2 (**)

Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{n+k}\right)$$

Exercice 3 (***)

Soit $\mathrm{I} =]\,0\,;+\infty\,[$. On pose $\quad \forall x \in \mathrm{I} \setminus \{1\} \qquad f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{I} \setminus \{1\}$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1. On note g ce prolongement.
3. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie, $f : \mathbb{R} \to \mathrm{E}$ dérivable en zéro telle que $f(0) = 0$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ admet une limite pour $n \to +\infty$ et la déterminer.

Exercice 5 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et $f \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,], \mathrm{E})$ avec $f(a) = 0$. Montrer
$$\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \operatorname*{Sup}_{t\in[\,a\,;b\,]} \|f'(t)\|$$

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie et $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathrm{E})$. On suppose que f et f'' sont bornées. On note $\mathrm{M}_0 = \|f\|_\infty$ et $\mathrm{M}_2 = \|f''\|_\infty$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\quad \forall h > 0 \qquad \|f'(x)\| \leqslant \dfrac{2\mathrm{M}_0}{h} + \dfrac{h\mathrm{M}_2}{2}$.
2. En déduire $\qquad \mathrm{M}_1 = \|f'\|_\infty \leqslant 2\sqrt{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}$
3. Peut-on améliorer l'inégalité ?

Exercice 7 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev normé de dimension finie et $f \in \mathscr{F}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$. On suppose qu'il existe $k \in \,]\,0\,;1\,[$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|f^2(x) - f^2(y)\| \leqslant k\|x - y\|$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 8 (***)

Déterminer $$\lim_{n \to +\infty} \sin(2\pi n!\mathrm{e}) \quad \text{puis} \quad \lim_{n \to +\infty} n^2 \sin(2\pi n!\mathrm{e})$$