ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

# Programme de colles

⚠ Venir avec un cahier de colles : y coller les énoncés des exercices et les reprendre à l'issue de la colle.

## Semaine 9 24/11/25 - 28/11/25

**Programme :**

Révisions de MPSI :
- Dérivabilité (définition, Rolle, accroissements finis, limite de la dérivée, Leibniz, prolongement $\mathscr{C}^k$) ;
- Analyse asymptotique (domination, négligeabilité, équivalence, développements limités) ;
- Calcul intégral (primitives usuelles, intégrale d'une fonction continue par morceaux, inégalité triangulaire, relation de Chasles, sommes de Riemann, intégrale fonction de sa borne supérieure, intégration par parties, changement de variables, formules de Taylor, etc.).

Séries et fonctions vectorielles à valeurs dans un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie :
- Séries vectorielles dans un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie : définition, convergence, reste de série convergente, condition nécessaire de convergence, série téléscopique, convergence absolue, la convergence absolue implique la convergence, norme subordonnée, la norme subordonnée est une norme d'algèbre ;
- Dérivation, propriétés, dérivabilité et dérivation de $\mathrm{L} \circ f$ avec L linéaire, de $\mathrm{B}(f, g)$ avec B application bilinéaire, de $\mathrm{M}(f_1, \ldots, f_p)$ avec M application $p$-linéaire, de $f \circ \varphi$ ;
- Dérivations successives, propriétés, extension des résultats sur $\mathrm{L} \circ f$ et $\mathrm{B}(f, g)$ ;
- Intégration sur un segment, définition, linéarité, relation de Chasles, sommes de Riemann, inégalité triangulaire, changement de variables, intégration par parties, application linéaire d'une intégrale, intégrale fonction de sa borne supérieure, inégalité des accroissements finis, formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange, théorème de Taylor-Young.

**Questions de cours :** (avec preuve sauf mention contraire)

1. La convergence absolue d'une série vectorielle entraine sa convergence, inégalité triangulaire généralisée ;
2. La norme subordonnée est une norme d'algèbre (avec résultats intermédiaires exposés aux chapitres précédents) ;
3. Pour $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\|u\|_{\mathrm{op}} < 1$, convergence absolue de $\sum u^n$ et inverse de $\mathrm{id} - u$ ;
4. Une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ contractante ($k$-lipschitzienne avec $k \in [\,0\,;1\,[$) admet un unique point fixe ;
5. Dérivabilité et dérivation de $\mathrm{L}(f)$ avec $f \in \mathscr{D}(\mathrm{I}, \mathrm{E})$ et $\mathrm{L} \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ ;
6. Dérivabilité et dérivation de $\mathrm{B}(f, g)$ avec $f \in \mathscr{D}(\mathrm{I}, \mathrm{E}), g \in \mathscr{D}(\mathrm{I}, \mathrm{F})$ et $\mathrm{B} : \mathrm{E} \times \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ bilinéaire ;

7. L'intégrale d'une fonction vectorielle ne dépend pas du choix d'une base ;
8. Inégalité triangulaire ;
9. Relation $\mathrm{L}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \mathrm{L}(f)(t)\,\mathrm{d}t$ avec $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,]\,,\mathrm{E})$ et $\mathrm{L} \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ ;
10. Inégalité des accroissements finis ;
11. Formule de Taylor avec reste intégral (sans preuve) ;
12. Inégalité de Taylor-Lagrange (sans preuve) ;
13. Formule de Tayor-Young (sans preuve).