

Préparation à l'interrogation n°10

1 Étude asymptotique

1. Équivalent en 1 de $x^\alpha - 1$;
2. Équivalent en 1 de $\ln(x)$;
3. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} = e^{n(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} = e^{1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} = e \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$;
4. Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0$ ou $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} +\infty$, alors $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ln(g(x))$.

En effet, on a
$$g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(x) + o(f(x)) = f(x)(1 + o(1))$$

puis
$$\ln(g(x)) = \underbrace{\ln(f(x))}_{\rightarrow \infty} + \underbrace{\ln(1 + o(1))}_{\rightarrow 0} = \ln(f(x)) + o(\ln(f(x)))$$

Le résultat suit.

2 Dérivation

Dérivée de f définie par $\forall t > 0 \quad f(t) = t \sin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

3 Trigonométrie

1. $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
2. $\sin(t)^2 = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$

4 Inégalités de convexité/concavité

1. $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq t$;
2. $\forall t > -1 \quad \ln(1+t) \leq t$;
3. $\forall t \in \mathbb{R} \quad 1+t \leq e^t$;
4. $\forall u \geq -1 \quad (1+u)^\alpha \geq 1 + \alpha u \quad \text{avec } \alpha \geq 1$;
5. $\forall u \geq 0 \quad 1 - u^\alpha \leq \alpha(1-u) \quad \text{avec } \alpha \geq 1$.

5 Formules

1. Taylor reste intégral
2. $x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$

6 Séries numériques

1. Encadrement du reste d'une série par comparaison série/intégrale ;
2. Critère de d'Alembert ;
3. Critère des séries alternées ;
4. Contrôle du reste d'une série alternée.

7 Exercice type

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \sqrt{t} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.

Corrigé : On définit la suite de fonctions continues par morceaux

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \quad f_n(t) = \begin{cases} \sqrt{t} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0; n] \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

Soit $t \geq 0$. Pour $n > t$, on a

$$f_n(t) = \sqrt{t} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \sqrt{t} e^{n \ln(1 - \frac{t}{n})} = \sqrt{t} e^{n(-\frac{t}{n} + o(\frac{1}{n}))} = \sqrt{t} e^{-t + o(1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sqrt{t} e^{-t}$$

Et avec l'inégalité de concavité $\ln(1 - u) \leq -u$ pour $u < 1$, il vient

$$0 \leq f_n(t) = \sqrt{t} e^{n \ln(1 - \frac{t}{n})} \leq \sqrt{t} e^{-t}$$

Posant $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \sqrt{t} e^{-t}$, on a $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées d'où l'intégrabilité de f qui est à la fois limite et dominante de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$. Par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_0^n \sqrt{t} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt}$$

8 Exercice type

Sommabilité de $\left(\frac{1}{(m+n)^3}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ (voir cours).

9 Exercice type

On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0; 1] \quad f_n(x) = nx^n(1 - x)$

Étudier le mode de convergence de $(f_n)_n$.

Corrigé : On a $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ pour tout $x \in [0; 1]$ (croissances comparées sur $]0; 1[$) puis avec une étude de fonctions (à faire !)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-1}$$

Ainsi $\boxed{\text{La suite } (f_n)_n \text{ converge simplement mais non uniformément vers la fonction nulle.}}$

10 Questions de cours

Familles sommables, suites de fonctions, graphes usuels.