

FORMULAIRE D'ANALYSE VECTORIELLE

I Champs de vecteurs et champs scalaires

1. Définition d'un champ de vecteurs

C'est une application qui, à tout point $M(x,y,z)$ associe un vecteur $\vec{a}(x,y,z)$

Définition d'une ligne de champ : C'est une ligne tangente en chacun de ses points au vecteur champ

2. Circulation du vecteur champ

Circulation élémentaire :

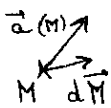
$$\delta C = \vec{a}(M) \cdot d\vec{M}$$

Ce n'est pas a priori la différentielle d'une fonction

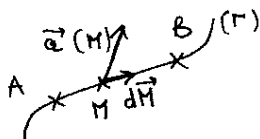
en coordonnées cartésiennes $\delta C = a_x dx + a_y dy + a_z dz$

en coordonnées cylindriques $\delta C = a_r dr + a_\theta r d\theta + a_z dz$

en coordonnées sphériques $\delta C = a_r dr + a_\theta r d\theta + a_\phi r \sin \theta d\phi$



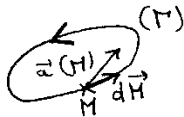
Circulation entre deux points le long d'un trajet :



$$C_A^B = \int_A^B \delta C = \int_A^B \vec{a}(M) \cdot d\vec{M}$$

Dépend a priori du chemin suivi

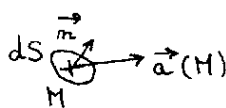
Circulation le long d'un contour fermé : $C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{a}(M) \cdot d\vec{M}$



Il faut choisir un sens d'orientation du contour, il détermine le signe de C_Γ

3. Flux du vecteur champ

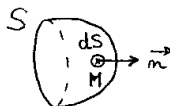
Flux à travers une surface élémentaire orientée :



On oriente dS par le choix de la normale $\vec{n}$

Flux élémentaire de $\vec{a}$ à travers dS : $d\Phi = \vec{a}(M) \cdot \vec{n}(M) dS$

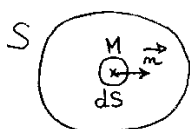
Flux à travers une surface orientée :



$$\Phi = \iint_S d\Phi = \iint_S \vec{a}(M) \cdot \vec{n}(M) dS$$

2 signes possibles suivant l'orientation de S

Flux à travers une surface fermée :



On choisit obligatoirement la normale sortant de la surface

$$\Phi = \oiint_S d\Phi = \oiint_S \vec{a}(M) \cdot \vec{n}(M) dS$$

4. Définition d'un champ scalaire

C'est une application V qui, à tout point $M(x,y,z)$ de l'espace associe un réel $V(x,y,z)$.

II. Opérateurs différentiels

1. Définition en coordonnées cartésiennes :

Le gradient : Il associe un champ de vecteurs à un champ scalaire



$$\text{grad}(V) = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$$

La divergence : Elle associe un champ de scalaires à un champ de vecteurs



$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad \text{où } \vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

Le rotationnel : Il associe un champ de vecteurs à un champ de vecteurs



$$\text{rot}(\vec{a}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Le Laplacien : Il agit soit sur un champ scalaire soit sur un champ de vecteurs



$$\text{Laplacien scalaire } \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$



$$\text{Laplacien vecteur } \vec{\Delta} \vec{a} = \begin{vmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \\ \Delta a_z \end{vmatrix}$$

2. En coordonnées cylindriques :

$$\text{grad}(V) = \begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} \quad \text{rot}(\vec{a}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\text{Laplacien scalaire : } \Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\text{Laplacien vecteur : } \vec{\Delta} \vec{a} = \begin{vmatrix} \Delta a_r - \frac{a_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} \\ \Delta a_\theta - \frac{a_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \\ \Delta a_z \end{vmatrix}$$

3. En coordonnées sphériques :

$$\text{grad}(V) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \quad \text{rot}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta a_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right] \\ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} \right] \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix}$$

$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

Laplacien scalaire :

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rV) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

Laplacien vecteur :

$$\vec{\Delta} \vec{a} = \begin{pmatrix} \Delta a_r - \frac{2a_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \sin \theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \\ \Delta a_\theta - \frac{a_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \\ \Delta a_\varphi - \frac{a_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

4. L'opérateur nabla :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Intérêt : $\text{grad}(V) = \vec{\nabla}(V)$

$$\text{div}(\vec{a}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}$$

$$\text{rot}(\vec{a}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{a}$$

$$\Delta(V) = (\vec{\nabla})^2 V$$

Inconvénients : - Ne « marche » qu'en coordonnées cartésiennes

- Danger : $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{a} ? \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) = \text{grad}(\text{div}(\vec{a}))$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})(\vec{a}) = \vec{\Delta}(\vec{a})$$

III. Théorèmes fondamentaux**1. Théorème de Stokes**

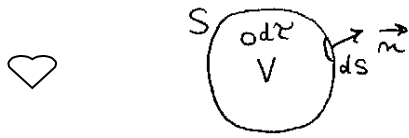
La circulation d'un vecteur $\vec{a}$ le long d'un contour fermé C est égale au flux de son rotationnel à travers toute surface S s'appuyant sur C et orientée par C (Le sens choisi pour orienter C détermine le sens de la normale à S).



$$\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{M} = \iint_S \text{rot}(\vec{a}) \cdot \vec{n} dS$$

2. Théorème d'Ostrogradski

Le flux d'un champ de vecteurs $\vec{a}$ à travers une surface fermée S est égale à l'intégrale de $\text{div}(\vec{a})$ sur le volume V limité par S .



$$\oiint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \text{div}(\vec{a}) dV$$

IV. Champ dérivant d'un potentiel scalaire

Def : Un champ de vecteurs $\vec{a}$ dérive d'un potentiel scalaire s'il existe un champ scalaire V tel que $\vec{a} = -\text{grad}(V)$

Théorèmes : Un champ de vecteurs $\vec{a}$ dérive d'un potentiel scalaire ssi

$$\exists V / \vec{a} = -\text{grad}(V) \Leftrightarrow \text{rot}(\vec{a}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \text{ est à circulation conservative ie } \forall C, \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{M} = 0$$

Dem partielle:

Propriétés :

* V n'est pas unique, il est défini à une constante près (puisque le gradient d'une constante est nul, $V' = V + K$ convient quel que soit la constante K).

$$* \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{M} = -\text{grad}(V) \cdot d\vec{M} = -dV$$

d'où $C_A^B = V(A) - V(B)$, la circulation de $\vec{a}$ est indépendante du chemin suivi.

Exemple des forces conservatives :

V. Formulaire

A savoir :

$$\text{div}(\text{rot}(\vec{a})) = 0$$

$$\text{rot}(\text{grad}(V)) = \vec{0}$$

$$\vec{\Delta} \vec{a} = \text{grad}(\text{div}(\vec{a})) - \text{rot}(\text{rot}(\vec{a}))$$

$$\text{div}(\vec{\text{grad}}(V)) = \Delta(V)$$

$$\text{Produit mixte} : (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$$

$$\text{Double produit vectoriel} : \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Donnés :

$$\text{grad}(V.W) = V.\text{grad}(W) + W.\text{grad}(V)$$

$$\text{div}(V.\vec{a}) = V.\text{div}(\vec{a}) + \vec{a} \cdot \text{grad}(V)$$

$$\text{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{rot}(\vec{a}) - \vec{a} \cdot \text{rot}(\vec{b})$$

$$\text{rot}(V.\vec{a}) = V.\text{rot}(\vec{a}) + \text{grad}(V) \wedge \vec{a}$$