

FAMILLES SOMMABLES

B. Landelle

Table des matières

I	Ensembles dénombrables	2
1	Définitions, propriétés	2
2	Produit d'ensembles	2
II	Familles sommables dans $[0; +\infty]$	4
1	Définitions	4
2	Lien avec les séries	5
3	Théorèmes de comparaison	6
4	Regroupement, réorganisation	6
III	Familles sommables de réels ou complexes	7
1	Définitions	7
2	Propriétés	8
3	Regroupement, réorganisation	8
4	Lien avec les séries	8
IV	Applications	9
1	Sommes doubles	9
2	Produit de Cauchy	10

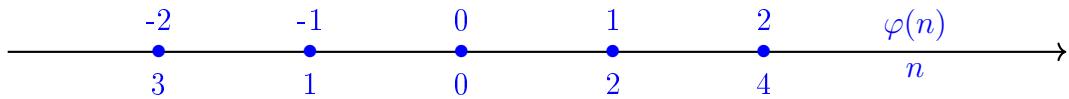
I Ensembles dénombrables

1 Définitions, propriétés

Définition 1. Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec \mathbb{N} .

Proposition 1. L'ensemble \mathbb{Z} est dénombrable.

Démonstration. Pour n entier, on pose $\varphi(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ pair} \\ -(n+1)/2 & \text{sinon} \end{cases}$. □



Théorème 1. Toute partie infinie de \mathbb{N} est dénombrable.

Démonstration. Soit A une partie infinie de \mathbb{N} . On pose $a_0 = \min A$ et $a_{n+1} = \min A \setminus \{a_0, \dots, a_n\}$ pour n entier. La suite $(a_n)_n$ est strictement croissante, à valeurs dans \mathbb{N} donc non majorée d'où $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$. Soit $x \in A$. Il existe N entier tel que $x < a_{N+1} = \min A \setminus \{a_0, \dots, a_N\}$.

Il s'ensuit que $x \in \{a_0, \dots, a_N\}$, d'où $A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\}$. On pose enfin $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow A, n \mapsto a_n$ qui est une bijection de \mathbb{N} dans A par construction. □

Théorème 2. Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de \mathbb{N} .

Démonstration. Le sens direct est immédiat par définition d'un ensemble fini et d'un ensemble dénombrable. Réciproquement, considérons un ensemble A en bijection avec une partie $B \subset \mathbb{N}$. Si l'ensemble A est infini, alors B l'est aussi donc B est dénombrable et par conséquent A aussi. Sinon, l'ensemble A est fini. □

Définition 2. Un ensemble est dit au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.

Proposition 2. Toute partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

Démonstration. Soit A un ensemble dénombrable et B une partie de A . On a

$$B \subset A \simeq \mathbb{N}$$

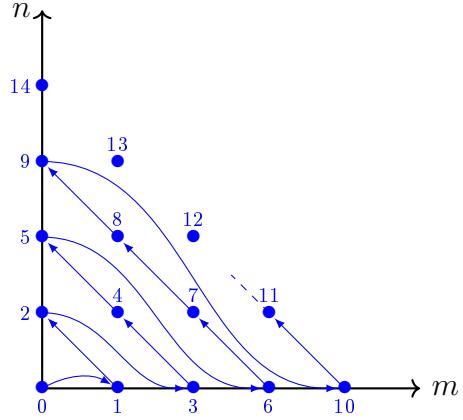
d'où B en bijection avec une partie de \mathbb{N} . Le résultat suit. □

2 Produit d'ensembles

Théorème 3. L'ensemble \mathbb{N}^2 est dénombrable.

Démonstration. On vérifie que l'application π : $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ définie pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ par

$$\pi(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$$



est une bijection. □

FIGURE 1 – Parcours de \mathbb{N}^2 par π

Théorème 4. Soient E, F des ensembles dénombrables. Alors $E \times F$ est dénombrable.

Démonstration. Soient $\varphi : E \rightarrow \mathbb{N}$ et $\psi : F \rightarrow \mathbb{N}$ et $\pi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ des bijections. L'application

$$\Phi : \begin{cases} E \times F \longrightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) \longmapsto \pi(\varphi(x), \psi(y)) \end{cases}$$

est une bijection. □

Corollaire 1. L'ensemble \mathbb{Q} est dénombrable.

Démonstration. Tout élément de \mathbb{Q} peut s'écrire sous forme d'une unique fraction irréductible p/q avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Ainsi, notant $A = \{(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \mid p \wedge q = 1\}$, l'application $\varphi : A \rightarrow \mathbb{Q}, (p, q) \mapsto p/q$ réalise une bijection de A sur \mathbb{Q} . On a \mathbb{Z} et \mathbb{N}^* dénombrables d'où $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dénombrable. L'ensemble A est une partie infinie de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ puisque A contient $\mathbb{Z} \times \{1\}$ et c'est donc un ensemble dénombrable. Ainsi, l'ensemble des rationnels \mathbb{Q} est en bijection avec un ensemble dénombrable ce qui prouve que \mathbb{Q} l'est aussi. □

Corollaire 2. Soient E_1, \dots, E_n des ensembles dénombrables. Alors le produit $E_1 \times \dots \times E_n$ est dénombrable.

Démonstration. Récurrence immédiate. □

Théorème 5. Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille au plus dénombrable (i.e. I au plus dénombrable) d'ensembles au plus dénombrables. Alors l'union $\bigcup_{i \in I} E_i$ est au plus dénombrable.

[Admis]

Théorème 6 (Cantor). L'ensemble \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

Démonstration. On utilise l'argument dit *de la diagonale de Cantor*. Supposons $[0; 1[= \{x_n, n \in \mathbb{N}^*\}$. On écrit le développement en base 10 de x_n (non stationnarité à 9 pour garantir l'unicité)

$$x_n = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k} 10^{-k} = 0, a_{n,1} a_{n,2} \dots a_{n,n} \dots$$

On pose $\forall n \geq 1 \quad b_n = \begin{cases} 2 & \text{si } a_{n,n} = 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ et $x = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n 10^{-n}$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{1,1} a_{1,2} \dots a_{1,n} \dots \\ x_2 &= 0, a_{2,1} a_{2,2} \dots a_{2,n} \dots \\ \dots &= \dots \\ x_n &= 0, a_{n,1} a_{n,2} \dots a_{n,n} \dots \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

FIGURE 2 – Modification le long de la diagonale de Cantor

Par unicité du développement en base 10 (avec non stationnarité à 9), on a $x \notin \{x_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ car $b_n \neq a_{n,n}$ pour tout n entier non nul et pourtant $x \in [0; 1[$ ce qui est absurde. On en déduit que $[0; 1[$ n'est pas dénombrable. Enfin, si \mathbb{R} était dénombrable, toute partie de \mathbb{R} serait au plus dénombrable ce qui est faux pour $[0; 1[$ d'où le résultat. \square

II Familles sommables dans $[0; +\infty]$

1 Définitions

Définition 3. On définit la demi-droite réelle achevée notée $[0; +\infty]$ ou $\overline{\mathbb{R}_+}$ par

$$\overline{\mathbb{R}_+} = [0; +\infty] = [0; +\infty[\cup \{+\infty\}$$

Définition 4. Dans $[0; +\infty]$, on étend :

- la relation d'ordre \leqslant avec $x \leqslant +\infty$ pour tout $x \in [0; +\infty]$;
- les notions de borne supérieure et inférieure qui existent, conformément aux définitions (plus petit majorant, plus grand minorant), pour toute partie $A \subset [0; +\infty]$ avec $\sup A = +\infty$ si A contient $+\infty$ ou est une partie de \mathbb{R}_+ non majorée et $\inf \emptyset = +\infty$, $\sup \emptyset = 0$;
- les opérations d'addition et de multiplication avec

$$\forall x \geq 0 \quad x + +\infty = +\infty + x = +\infty \quad +\infty + +\infty = +\infty$$

$$\forall x \in]0; +\infty[\cup \{+\infty\} \quad x \times +\infty = +\infty \times x = +\infty \quad 0 \times +\infty = +\infty \times 0 = 0$$

Définition 5. Soit $(u_i)_{i \in I}$ famille à valeurs dans $[0; +\infty]$. On définit dans $[0; +\infty]$ la somme de cette famille notée $\sum_{i \in I} u_i$ par

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup_{F \text{ fini } \subset I} \sum_{i \in F} u_i$$

Définition 6. Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de réels positifs est dite sommable si $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$ et non sommable sinon.

Exemple : Soit $q \in [0; 1[$. La famille $(q^{mn})_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. Soit F partie finie de $(\mathbb{N}^*)^2$. Il existe $N \geq 1$ tel que $F \subset \llbracket 1; N \rrbracket^2$. Par suite

$$\sum_{(m,n) \in F} q^{mn} \leq \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N q^{mn} = \sum_{n=1}^N q^n \frac{1 - q^{nN}}{1 - q^n} \leq \frac{1}{1 - q} \sum_{n=1}^N q^n \leq \frac{q}{(1 - q)^2}$$

Le résultat suit. On verra une rédaction nettement plus efficace après énonciation du théorème de Fubini.

Définition 7. On appelle support d'une famille $(u_i)_{i \in I}$ de réels positifs l'ensemble noté $\text{supp}(u_i)_{i \in I}$ défini par

$$\text{supp}(u_i)_{i \in I} = \{i \in I \mid u_i > 0\}$$

Proposition 3. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs. Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors son support est au plus dénombrable.

Démonstration. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_n = \left\{ i \in I \mid u_i \geq \frac{1}{n} \right\}$$

Soit n entier non nul. Pour F partie finie de F_n , on a

$$\sum_{i \in I} u_i \geq \sum_{i \in F} u_i \geq \frac{1}{n} \text{Card } F$$

d'où

$$\text{Card } F \leq n \sum_{i \in I} u_i$$

Si F_n est infini, alors on peut choisir $F \subset F_n$ tel que $\text{Card } F$ soit arbitrairement grand ce qui est exclu d'après la majoration ci-dessus. On en déduit que F_n est un ensemble fini et comme on a $\text{supp}(u_i)_{i \in I} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$ union dénombrable d'ensembles finis, on conclut que le support est au plus dénombrable. \square

Proposition 4. Soient $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ des familles à valeurs dans $[0; +\infty]$ et $\lambda \in [0; +\infty]$.

On a

$$\sum_{i \in I} (\lambda u_i + v_i) = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i$$

2 Lien avec les séries

Soit $(u_n)_n$ suite de réels positifs. Si la série $\sum u_n$ diverge, on étend la notation somme en posant

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$$

Théorème 7. Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs. On a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Remarque : En particulier, on a

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sommable} \iff \sum u_n \text{ converge}$$

3 Théorèmes de comparaison

Proposition 5. Soient $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ des familles à valeurs dans $[0; +\infty]$ telles que $u_i \leq v_i$ pour tout $i \in I$. On a

$$\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$$

Remarque : En particulier, on a

$$(v_i)_{i \in I} \text{ sommable} \implies (u_i)_{i \in I} \text{ sommable}$$

Exemple : La famille $\left(\frac{1}{(m^2 + n^2)^2}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. On a

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*2} \quad m^2 + n^2 \geq 2mn \implies \frac{1}{(m^2 + n^2)^2} \leq \frac{1}{4m^2n^2}$$

Pour F partie finie de $(\mathbb{N}^*)^2$, il existe N entier non nul tel que $F \subset \llbracket 1; N \rrbracket^2$ puis

$$\sum_{(m,n) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2} \frac{1}{4m^2n^2} \leq \frac{1}{4} \zeta(2)^2 \quad \text{avec} \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad \forall s > 1$$

La sommabilité de $\left(\frac{1}{4m^2n^2}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ en résulte et par comparaison, celle de $\left(\frac{1}{(m^2 + n^2)^2}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ également. On verra une rédaction plus efficace après énonciation du théorème de Fubini.

Proposition 6. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille à valeurs dans $[0; +\infty]$ et $J \subset I$. On a

$$\sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$$

Remarque : En particulier, si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i \in J}$ l'est aussi.

4 Regroupement, réorganisation

Théorème 8 (Théorème de sommation par paquets). Soient $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I et $(u_i)_{i \in I}$ une famille à valeurs dans $[0; +\infty]$. On a

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I_k} u_i \right)$$

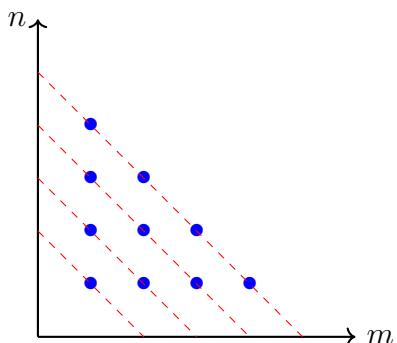
Exemple : Étude de $\sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(m+n)^3}$

On pose

$$\forall p \geq 2 \quad I_p = \{(m, n) \in \mathbb{N}^{*2} \mid m + n = p\}$$

La famille $(I_p)_{p \geq 2}$ est un recouvrement disjoint de $(\mathbb{N}^*)^2$ et on a

$$\forall p \geq 2 \quad I_p = \{(m, p-m), m \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket\}$$



Par sommation par paquets, il vient

$$\sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(m+n)^3} = \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\sum_{(m,n) \in I_p} \frac{1}{(m+n)^3} \right) = \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{p-1} \frac{1}{p^3} \right) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{p-1}{p^3} \leq \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^2} < +\infty$$

Théorème 9. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille à valeurs dans $[0; +\infty]$ et $\sigma \in \mathcal{S}(I)$ une permutation de I (bijection de I dans I). On a

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)}$$

Exemples : 1. Soit $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N}^*)$. On a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sigma(n)} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sigma(n)^2} = \dots < +\infty$$

2. Soit $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N}^*)$. On a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n\sigma(n)} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{\sigma(n)^2} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

III Familles sommables de réels ou complexes

Dans ce qui suit, on a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

1 Définitions

Définition 8. La famille de réels ou complexes $(u_i)_{i \in I}$ est dite sommable si la famille $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable.

Notation : On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles sommables de \mathbb{C}^I .

Remarque : Si la famille de réels $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors les familles $(u_i^+)_{i \in I}$ et $(u_i^-)_{i \in I}$ sont sommables puisque

$$\forall i \in I \quad 0 \leq u_i^+ \leq |u_i| \quad \text{et} \quad 0 \leq u_i^- \leq |u_i|$$

De même, si la famille de complexes $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors les familles $(\operatorname{Re}(u_i))_{i \in I}$ et $(\operatorname{Im}(u_i))_{i \in I}$ sont sommables puisque

$$\forall i \in I \quad 0 \leq |\operatorname{Re}(u_i)| \leq |u_i| \quad \text{et} \quad 0 \leq |\operatorname{Im}(u_i)| \leq |u_i|$$

Définition 9. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels sommable. On définit la somme de cette famille notée $\sum_{i \in I} u_i$ par

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-$$

Définition 10. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de complexes sommable. On définit la somme de cette famille notée $\sum_{i \in I} u_i$ par

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i)$$

Remarque : On a donc

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{i \in I} u_i \right) = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \left(\sum_{i \in I} u_i \right) = \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i)$$

Exemple : Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. On a $(z^{nm})_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2} \in \ell^1((\mathbb{N}^*)^2)$.

2 Propriétés

Proposition 7. Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On a

$$(u_i)_{i \in I} \in \ell^1(I) \iff (\lambda u_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)$$

et dans ce cas

$$\sum_{i \in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i$$

Théorème 10 (Linéarité du symbole somme). L'ensemble $\ell^1(I)$ un sev de \mathbb{C}^I et l'application $(u_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} u_i$ est une forme linéaire.

Proposition 8 (Croissance de la somme). Soient $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ des familles réelles sommables telles que $u_i \leq v_i$ pour tout $i \in I$. Alors $\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$.

Théorème 11 (Inégalité triangulaire). Soit $(u_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)$. On a

$$\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \sum_{i \in I} |u_i|$$

3 Regroupement, réorganisation

Théorème 12 (Théorème de sommation par paquets). Soient $(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de I et $(u_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)$. Alors, on a :

- pour tout $k \in K$, la famille $(u_i)_{i \in I_k}$ est sommable ;
- la famille $\left(\sum_{i \in I_k} u_i \right)_{k \in K}$ est sommable ;
- et l'égalité $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I_k} u_i \right)$

Théorème 13. Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ et $\sigma \in \mathcal{S}(I)$ une permutation de I . On a

$$(u_i)_{i \in I} \in \ell^1(I) \iff (u_{\sigma(i)})_{i \in I} \in \ell^1(I)$$

et dans ce cas

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)}$$

4 Lien avec les séries

Théorème 14. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de réels ou complexes. On a

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}) \iff \sum u_n \text{ converge absolument}$$

et dans ce cas

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Théorème 15. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de réels ou complexes et $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$. On a

$$\sum u_n \text{ converge absolument} \iff \sum u_{\sigma(n)} \text{ converge absolument}$$

et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$$

Remarque : Sans l'hypothèse de convergence absolue, le résultat est faux. Plus précisément, on dispose du *théorème de réarrangement de Riemann* : Soit $(u_n)_n$ suite réelle telle que $\sum u_n$ converge et $\sum |u_n|$ diverge. Pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \alpha$.

IV Applications

1 Sommes doubles

Théorème 16 (Théorème de Fubini positif). Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille à valeurs dans $[0; +\infty]$. On a

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} a_{i,j} \right)$$

Exemples : 1. On reprend l'exemple de $(q^{mn})_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$. D'après le théorème de Fubini positif, on a

$$\sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} q^{mn} = \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} q^{mn} \right) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{q^m}{1-q^m} \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{q^m}{1-q} < +\infty$$

2. Étude de $\sum_{m,n \geq 2} \frac{1}{n^m}$. D'après le théorème de Fubini positif, on a

$$\sum_{m,n \geq 2} \frac{1}{n^m} = \sum_{m=2}^{+\infty} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^m} \right) = \sum_{m=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \right) = \sum_{m=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right] = 1$$

puis

$$\sum_{m,n \geq 2} \frac{1}{n^m} = \sum_{m=2}^{+\infty} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^m} \right) = \sum_{m=2}^{+\infty} [\zeta(m) - 1]$$

On obtient l'égalité

$$\sum_{m=2}^{+\infty} [\zeta(m) - 1] = 1$$

Corollaire 3. Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ des familles à valeurs dans $[0; +\infty]$. On a

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right)$$

Exemple : D'après le théorème de Fubini positif, on a

$$\sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{m^2 n^2} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) = \zeta(2)^2 < +\infty$$

Théorème 17 (Théorème de Fubini). Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J} \in \ell^1(I \times J)$. On a

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} a_{i,j} \right)$$

Remarque : D'après le théorème de Fubini positif, on a

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} |a_{i,j}| < +\infty \iff \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} |a_{i,j}| \right) < +\infty$$

ce qui implique $(a_{i,j})_j$ sommable pour tout $i \in I$ et $\left(\sum_{j \in J} a_{i,j} \right)_{i \in I}$ sommable, et de même en échangeant les rôles de i et j .

Corollaire 4. Soit $(a_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)$ et $(b_j)_{j \in J} \in \ell^1(J)$. Alors, on a $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J} \in \ell^1(I \times J)$ et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right)$$

2 Produit de Cauchy

Définition 11. On appelle produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ réelles ou complexes la série $\sum w_n$ de terme général

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

Théorème 18. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles ou complexes absolument convergentes. Alors, leur produit de Cauchy $\sum w_n$ est une série absolument convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

Démonstration. Sans difficulté, la famille $(u_n v_m)_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable puisque

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} |u_n v_m| = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \right) \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} |v_m| \right) < +\infty$$

Ainsi

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} u_n v_m = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} v_m \right)$$

On pose $\forall p \in \mathbb{N} \quad I_p = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n + m = p\} = \{(n, p - n), n \in \llbracket 0 ; p \rrbracket\}$

La famille $(I_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement disjoint de \mathbb{N}^2 .

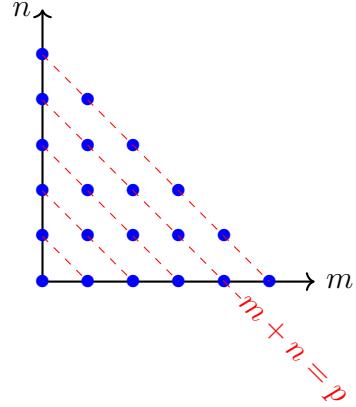


FIGURE 3 – Famille $(I_p)_{p \in \mathbb{N}}$ partition de \mathbb{N}^2

D'après le théorème de sommation par paquets, pour p entier la famille $(u_n v_m)_{(n,m) \in I_p}$ est sommable (en fait, I_p est un ensemble fini) avec

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{(n,m) \in I_p} u_n v_m = w_p$$

puis, la série $\sum \left(\sum_{(n,m) \in I_p} u_n v_m \right) = \sum w_p$ converge absolument et on a

$$\sum_{p=0}^{+\infty} w_p = \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} u_n v_m$$

et le résultat suit. \square

Remarque : Sans l'hypothèse de convergence absolue, le résultat est faux en général. Considérons $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour n entier non nul et $u_0 = v_0 = 0$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$$

Or, on a $k(n-k) \leq (n-1)^2$ pour tout $k \in \llbracket 1 ; n-1 \rrbracket$ d'où la divergence grossière de la série $\sum w_n$. En fait, les hypothèses du théorème précédent peuvent être un peu affaiblies (théorème de Mertens, hors programme).

Exemple : Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $|a| < 1$, $|b| < 1$ et $a \neq b$. Les séries $\sum a^n$ et $\sum b^n$ convergent absolument d'où, d'après le théorème du produit de Cauchy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b^n \right)$$

et avec un recours à l'identité de Bernoulli, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = \frac{1}{(1-a)(1-b)}$$

On peut aussi établir ce résultat naïvement, sans recours au produit de Cauchy.

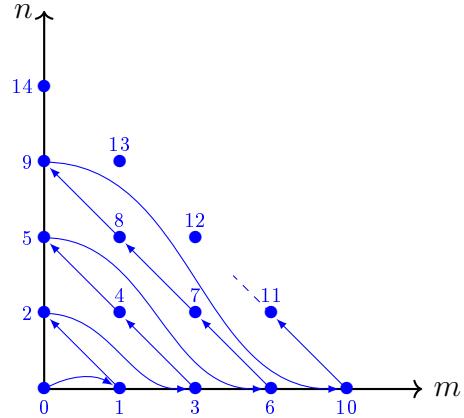
Annexes

Produit d'ensembles

Théorème 3. L'ensemble \mathbb{N}^2 est dénombrable.

Démonstration. Soit $\pi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ définie pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ par

$$\pi(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$$



Montrons que π est une bijection.

FIGURE 4 – Parcours de \mathbb{N}^2 par π

On suit la trame suivante :

1. Justifier que π est définie de \mathbb{N}^2 sur \mathbb{N} .
2. Montrer

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \pi(m, n+1) = \pi(m+1, n) + 1 \quad \text{et} \quad \pi(n+1, 0) = \pi(0, n) + 1$$

En déduire que π est surjective.

3. Montrer

$$\forall (m, n, m', n') \in \mathbb{N}^4 \quad m' + n' \geq m + n + 1 \implies \pi(m', n') > \pi(m, n)$$

En déduire l'injectivité de π .

Étapes : 1. Les entiers $m+n$ et $m+n+1$ sont consécutifs donc l'un d'eux est pair et par conséquent

L'application π est bien définie de \mathbb{N}^2 sur \mathbb{N} .

Variante : On peut observer que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \pi(m, n) = n + \sum_{k=1}^{m+n} k \in \mathbb{N}$$

2. On a $\pi(0, 0) = 0$ d'où $0 \in \text{Im } \pi$. On vérifie sans peine les relations demandées. Puis, pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on observe

$$\pi(m, n) + 1 = \begin{cases} \pi(n+1, 0) & \text{si } m = 0 \\ \pi(m-1, n+1) & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où $\pi(m, n) + 1 \in \text{Im } \pi$. Ainsi, l'ensemble $\text{Im } \pi$ est une partie de \mathbb{N} contenant 0 et qui vérifie le principe de récurrence et on conclut

$\text{Im } \pi = \mathbb{N}$

3. Soient (m, n) et (m', n') dans \mathbb{N}^2 avec $(m, n) \neq (m', n')$. Si $m' + n' \geq m + n + 1$, il vient

$$\begin{aligned}\pi(m', n') &= \frac{(m' + n')(m' + n' + 1)}{2} + n' \geqslant \frac{(m + n + 1)(m + n + 2)}{2} + n' \\ &\geqslant \frac{(m + n)(m + n + 1)}{2} + n + m + 1 + n' > \pi(m, n)\end{aligned}$$

c'est-à-dire $m' + n' > m + n \implies \pi(m', n') > \pi(m, n)$

Par symétrie des rôles, on en déduit

$$m + n \neq m' + n' \implies \pi(m, n) \neq \pi(m', n')$$

Supposons $(m, n) \neq (m', n')$. Si $m + n = m' + n'$, alors $n \neq n'$ d'où $\pi(m, n) \neq \pi(m', n')$ et sinon on a également $\pi(m', n') \neq \pi(m, n)$ d'après l'implication précédente. Dans tous les cas, on a donc

$$(m, n) \neq (m', n') \implies \pi(m, n) \neq \pi(m', n')$$

Ainsi

L'application π est une injection de \mathbb{N}^2 sur \mathbb{N} .

Variante : Pour montrer l'inégalité demandée, on peut aussi écrire

$$\pi(m', n') = n' + \sum_{k=1}^{m'+n'} k \geqslant n' + \sum_{k=1}^{m+n+1} k = m + 1 + n' + n + \sum_{k=1}^{m+n} k = m + 1 + n' + \pi(m, n)$$

Ainsi, l'application π est surjective et injective et réalise donc une bijection de \mathbb{N}^2 dans \mathbb{N} . \square