

# FAMILLES SOMMABLES

B. Landelle

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Ensembles dénombrables</b>	<b>2</b>
1	Définitions, propriétés . . . . .	2
2	Produit d'ensembles . . . . .	2
<b>II</b>	<b>Familles sommables dans <math>[0; +\infty]</math></b>	<b>4</b>
1	Définitions . . . . .	4
2	Lien avec les séries . . . . .	5
3	Théorèmes de comparaison . . . . .	6
4	Regroupement, réorganisation . . . . .	6
<b>III</b>	<b>Familles sommables de réels ou complexes</b>	<b>7</b>
1	Définitions . . . . .	7
2	Propriétés . . . . .	8
3	Regroupement, réorganisation . . . . .	8
4	Lien avec les séries . . . . .	8
<b>IV</b>	<b>Applications</b>	<b>9</b>
1	Sommes doubles . . . . .	9
2	Produit de Cauchy . . . . .	10

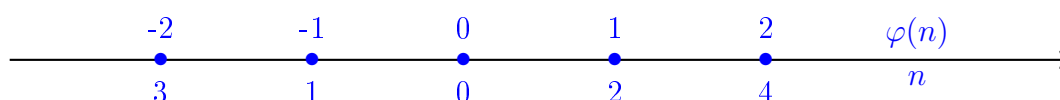
# I Ensembles dénombrables

## 1 Définitions, propriétés

**Définition 1.** Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec  $\mathbb{N}$ .

**Proposition 1.** L'ensemble  $\mathbb{Z}$  est dénombrable.

*Démonstration.* Pour  $n$  entier, on pose  $\varphi(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ pair} \\ -(n+1)/2 & \text{sinon} \end{cases}$ . □



**Théorème 1.** Toute partie infinie de  $\mathbb{N}$  est dénombrable.

*Démonstration.* Soit  $A$  une partie infinie de  $\mathbb{N}$ . On pose  $a_0 = \min A$  et  $a_{n+1} = \min A \setminus \{a_0, \dots, a_n\}$  pour  $n$  entier. La suite  $(a_n)_n$  est strictement croissante, à valeurs dans  $\mathbb{N}$  donc non majorée d'où  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ . Soit  $x \in A$ . Il existe  $N$  entier tel que  $x < a_{N+1} = \min A \setminus \{a_0, \dots, a_N\}$ .

Il s'ensuit que  $x \in \{a_0, \dots, a_N\}$ , d'où  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\}$ . On pose enfin  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow A, n \mapsto a_n$  qui est une bijection de  $\mathbb{N}$  dans  $A$  par construction. □

**Théorème 2.** Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de  $\mathbb{N}$ .

*Démonstration.* Le sens direct est immédiat par définition d'un ensemble fini et d'un ensemble dénombrable. Réciproquement, considérons un ensemble  $A$  en bijection avec une partie  $B \subset \mathbb{N}$ . Si l'ensemble  $A$  est infini, alors  $B$  l'est aussi donc  $B$  est dénombrable et par conséquent  $A$  aussi. Sinon, l'ensemble  $A$  est fini. □

**Définition 2.** Un ensemble est dit au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.

**Proposition 2.** Toute partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

*Démonstration.* Soit  $A$  un ensemble dénombrable et  $B$  une partie de  $A$ . On a

$$B \subset A \simeq \mathbb{N}$$

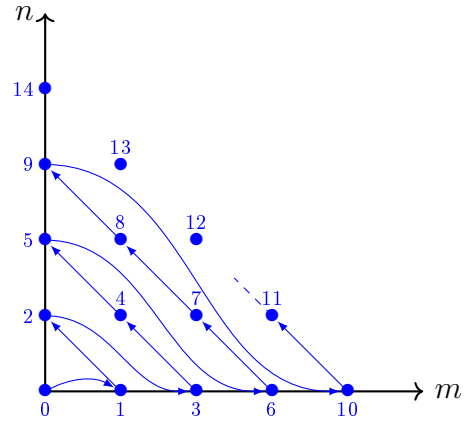
d'où  $B$  en bijection avec une partie de  $\mathbb{N}$ . Le résultat suit. □

## 2 Produit d'ensembles

**Théorème 3.** L'ensemble  $\mathbb{N}^2$  est dénombrable.

*Démonstration.* On vérifie que l'application  $\pi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  définie pour  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  par

$$\pi(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$$



est une bijection.

FIGURE 1 – Parcours de  $\mathbb{N}^2$  par  $\pi$

□

**Théorème 4.** Soient  $E, F$  des ensembles dénombrables. Alors  $E \times F$  est dénombrable.

*Démonstration.* Soient  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{N}$  et  $\psi : F \rightarrow \mathbb{N}$  et  $\pi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  des bijections. L'application

$$\Phi : \begin{cases} E \times F \longrightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) \longmapsto \pi(\varphi(x), \psi(y)) \end{cases}$$

est une bijection.

□

**Corollaire 1.** L'ensemble  $\mathbb{Q}$  est dénombrable.

*Démonstration.* Tout élément de  $\mathbb{Q}$  peut s'écrire sous forme d'une unique fraction irréductible  $p/q$  avec  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ . Ainsi, notant  $A = \{(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \mid p \wedge q = 1\}$ , l'application  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{Q}, (p, q) \mapsto p/q$  réalise une bijection de  $A$  sur  $\mathbb{Q}$ . On a  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{N}^*$  dénombrables d'où  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  dénombrable. L'ensemble  $A$  est une partie infinie de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  puisque  $A$  contient  $\mathbb{Z} \times \{1\}$  et c'est donc un ensemble dénombrable. Ainsi, l'ensemble des rationnels  $\mathbb{Q}$  est en bijection avec un ensemble dénombrable ce qui prouve que  $\mathbb{Q}$  l'est aussi.

□

**Corollaire 2.** Soient  $E_1, \dots, E_n$  des ensembles dénombrables. Alors le produit  $E_1 \times \dots \times E_n$  est dénombrable.

*Démonstration.* Récurrence immédiate.

□

**Théorème 5.** Soit  $(E_i)_{i \in I}$  une famille au plus dénombrable (i.e.  $I$  au plus dénombrable) d'ensembles au plus dénombrables. Alors l'union  $\bigcup_{i \in I} E_i$  est au plus dénombrable.

[Admis]

**Théorème 6 (Cantor).** L'ensemble  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable.

*Démonstration.* On utilise l'argument dit de la diagonale de Cantor. Supposons  $[0; 1[ = \{x_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ . On écrit le développement en base 10 de  $x_n$  (non stationnarité à 9 pour garantir l'unicité)

$$x_n = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k} 10^{-k} = 0, a_{n,1} a_{n,2} \dots a_{n,n} \dots$$

On pose  $\forall n \geq 1 \quad b_n = \begin{cases} 2 & \text{si } a_{n,n} = 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad x = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n 10^{-n}$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \textcircled{a_{1,1}} a_{1,2} \dots a_{1,n} \dots \\ x_2 &= 0, a_{2,1} \textcircled{a_{2,2}} \dots a_{2,n} \dots \\ &\dots = \dots \\ x_n &= 0, a_{n,1} a_{n,2} \dots \textcircled{a_{n,n}} \dots \\ &\dots = \dots \end{aligned}$$

FIGURE 2 – Modification le long de la diagonale de Cantor

Par unicité du développement en base 10 (avec non stationnarité à 9), on a  $x \notin \{x_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  car  $b_n \neq a_{n,n}$  pour tout  $n$  entier non nul et pourtant  $x \in [0; 1[$  ce qui est absurde. On en déduit que  $[0; 1[$  n'est pas dénombrable. Enfin, si  $\mathbb{R}$  était dénombrable, toute partie de  $\mathbb{R}$  serait au plus dénombrable ce qui est faux pour  $[0; 1[$  d'où le résultat.  $\square$

## II Familles sommables dans $[0; +\infty]$

### 1 Définitions

**Définition 3.** On définit la demi-droite réelle achevée notée  $[0; +\infty]$  ou  $\overline{\mathbb{R}_+}$  par

$$\overline{\mathbb{R}_+} = [0; +\infty] = [0; +\infty[ \cup \{+\infty\}$$

**Définition 4.** Dans  $[0; +\infty]$ , on étend :

- la relation d'ordre  $\leq$  avec  $x \leq +\infty$  pour tout  $x \in [0; +\infty]$  ;
- les notions de borne supérieure et inférieure qui existent, conformément aux définitions (plus petit majorant, plus grand minorant), pour toute partie  $A \subset [0; +\infty]$  avec  $\sup A = +\infty$  si  $A$  contient  $+\infty$  ou est une partie de  $\mathbb{R}_+$  non majorée et  $\inf \emptyset = +\infty$ ,  $\sup \emptyset = 0$  ;
- les opérations d'addition et de multiplication avec

$$\forall x \geq 0 \quad x + +\infty = +\infty + x = +\infty \quad +\infty + +\infty = +\infty$$

$$\forall x \in ]0; +\infty[ \cup \{+\infty\} \quad x \times +\infty = +\infty \times x = +\infty \quad 0 \times +\infty = +\infty \times 0 = 0$$

**Définition 5.** Soit  $(u_i)_{i \in I}$  famille à valeurs dans  $[0; +\infty]$ . On définit dans  $[0; +\infty]$  la somme de cette famille notée  $\sum_{i \in I} u_i$  par

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup_{F \text{ fini } \subset I} \sum_{i \in F} u_i$$

**Définition 6.** Une famille  $(u_i)_{i \in I}$  de réels positifs est dite sommable si  $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$  et non sommable sinon.

**Exemple :** Soit  $q \in [0; 1[$ . La famille  $(q^{mn})_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  est sommable. Soit  $F$  partie finie de  $(\mathbb{N}^*)^2$ . Il existe  $N \geq 1$  tel que  $F \subset \llbracket 1; N \rrbracket^2$ . Par suite

$$\sum_{(m,n) \in F} q^{mn} \leq \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N q^{mn} = \sum_{n=1}^N q^n \frac{1 - q^{nN}}{1 - q^n} \leq \frac{1}{1 - q} \sum_{n=1}^N q^n \leq \frac{q}{(1 - q)^2}$$

Le résultat suit. On verra une rédaction nettement plus efficace après énonciation du théorème de Fubini.

**Définition 7.** On appelle support d'une famille  $(u_i)_{i \in I}$  de réels positifs l'ensemble noté  $\text{supp}(u_i)_{i \in I}$  défini par

$$\text{supp}(u_i)_{i \in I} = \{i \in I \mid u_i > 0\}$$

**Proposition 3.** Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs. Si  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable, alors son support est au plus dénombrable.

*Démonstration.* On pose  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_n = \left\{ i \in I \mid u_i \geq \frac{1}{n} \right\}$

Soit  $n$  entier non nul. Pour  $F$  partie finie de  $F_n$ , on a

$$\sum_{i \in I} u_i \geq \sum_{i \in F} u_i \geq \frac{1}{n} \text{Card } F$$

d'où  $\text{Card } F \leq n \sum_{i \in I} u_i$

Si  $F_n$  est infini, alors on peut choisir  $F \subset F_n$  tel que  $\text{Card } F$  soit arbitrairement grand ce qui est exclu d'après la majoration ci-dessus. On en déduit que  $F_n$  est un ensemble fini et comme on a  $\text{supp}(u_i)_{i \in I} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$  union dénombrable d'ensembles finis, on conclut que le support est au plus dénombrable.  $\square$

**Proposition 4.** Soient  $(u_i)_{i \in I}$  et  $(v_i)_{i \in I}$  des familles à valeurs dans  $[0; +\infty]$  et  $\lambda \in [0; +\infty]$ .

On a 
$$\sum_{i \in I} (\lambda u_i + v_i) = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i$$

## 2 Lien avec les séries

Soit  $(u_n)_n$  suite de réels positifs. Si la série  $\sum u_n$  diverge, on étend la notation somme en posant

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$$

**Théorème 7.** Soit  $(u_n)_n$  une suite de réels positifs. On a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

**Remarque :** En particulier, on a

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sommable} \iff \sum u_n \text{ converge}$$

### 3 Théorèmes de comparaison

**Proposition 5.** Soient  $(u_i)_{i \in I}$  et  $(v_i)_{i \in I}$  des familles à valeurs dans  $[0; +\infty]$  telles que  $u_i \leq v_i$  pour tout  $i \in I$ . On a

$$\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$$

**Remarque :** En particulier, on a

$$(v_i)_{i \in I} \text{ sommable} \implies (u_i)_{i \in I} \text{ sommable}$$

**Exemple :** La famille  $\left( \frac{1}{(m^2 + n^2)^2} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  est sommable. On a

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*2} \quad m^2 + n^2 \geq 2mn \implies \frac{1}{(m^2 + n^2)^2} \leq \frac{1}{4m^2 n^2}$$

Pour  $F$  partie finie de  $(\mathbb{N}^*)^2$ , il existe  $N$  entier non nul tel que  $F \subset \llbracket 1; N \rrbracket^2$  puis

$$\sum_{(m,n) \in \llbracket 1; N \rrbracket^2} \frac{1}{4m^2 n^2} \leq \frac{1}{4} \zeta(2)^2 \quad \text{avec} \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad \forall s > 1$$

La sommabilité de  $\left( \frac{1}{4m^2 n^2} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  en résulte et par comparaison, celle de  $\left( \frac{1}{(m^2 + n^2)^2} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  également. On verra une rédaction plus efficace après énonciation du théorème de Fubini.

**Proposition 6.** Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille à valeurs dans  $[0; +\infty]$  et  $J \subset I$ . On a

$$\sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$$

**Remarque :** En particulier, si  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable, alors  $(u_i)_{i \in J}$  l'est aussi.

### 4 Regroupement, réorganisation

**Théorème 8 (Théorème de sommation par paquets).** Soient  $(I_k)_{k \in K}$  un recouvrement disjoint de  $I$  et  $(u_i)_{i \in I}$  une famille à valeurs dans  $[0; +\infty]$ . On a

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \left( \sum_{i \in I_k} u_i \right)$$

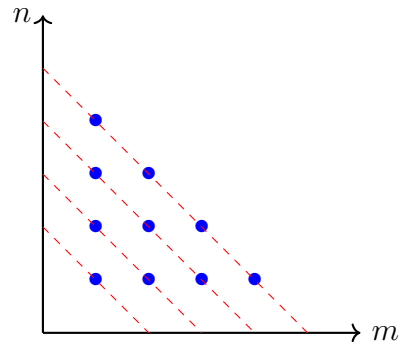
**Exemple :** Étude de  $\sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(m+n)^3}$

On pose

$$\forall p \geq 2 \quad I_p = \{(m, n) \in \mathbb{N}^{*2} \mid m + n = p\}$$

La famille  $(I_p)_{p \geq 2}$  est un recouvrement disjoint de  $(\mathbb{N}^*)^2$  et on a

$$\forall p \geq 2 \quad I_p = \{(m, p - m), m \in \llbracket 1; p - 1 \rrbracket\}$$



Par sommation par paquets, il vient

$$\sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(m+n)^3} = \sum_{p=2}^{+\infty} \left( \sum_{(m,n) \in I_p} \frac{1}{(m+n)^3} \right) = \sum_{p=2}^{+\infty} \left( \sum_{m=1}^{p-1} \frac{1}{p^3} \right) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{p-1}{p^3} \leq \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^2} < +\infty$$

**Théorème 9.** Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille à valeurs dans  $[0; +\infty]$  et  $\sigma \in \mathcal{S}(I)$  une permutation de  $I$  (bijection de  $I$  dans  $I$ ). On a

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)}$$

**Exemples :** 1. Soit  $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N}^*)$ . On a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sigma(n)} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sigma(n)^2} = \dots < +\infty$$

2. Soit  $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N}^*)$ . On a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n\sigma(n)} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{\sigma(n)^2} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

### III Familles sommables de réels ou complexes

Dans ce qui suit, on a  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

#### 1 Définitions

**Définition 8.** La famille de réels ou complexes  $(u_i)_{i \in I}$  est dite sommable si la famille  $(|u_i|)_{i \in I}$  est sommable.

**Notation :** On note  $\ell^1(I)$  l'ensemble des familles sommables de  $\mathbb{C}^I$ .

**Remarque :** Si la famille de réels  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable, alors les familles  $(u_i^+)_{i \in I}$  et  $(u_i^-)_{i \in I}$  sont sommables puisque

$$\forall i \in I \quad 0 \leq u_i^+ \leq |u_i| \quad \text{et} \quad 0 \leq u_i^- \leq |u_i|$$

De même, si la famille de complexes  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable, alors les familles  $(\operatorname{Re}(u_i))_{i \in I}$  et  $(\operatorname{Im}(u_i))_{i \in I}$  sont sommables puisque

$$\forall i \in I \quad 0 \leq |\operatorname{Re}(u_i)| \leq |u_i| \quad \text{et} \quad 0 \leq |\operatorname{Im}(u_i)| \leq |u_i|$$

**Définition 9.** Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de réels sommable. On définit la somme de cette famille notée  $\sum_{i \in I} u_i$  par

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-$$

**Définition 10.** Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de complexes sommable. On définit la somme de cette famille notée  $\sum_{i \in I} u_i$  par

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i)$$

**Remarque :** On a donc

$$\operatorname{Re} \left( \sum_{i \in I} u_i \right) = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \left( \sum_{i \in I} u_i \right) = \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i)$$

**Exemple :** Soit  $z \in \mathbb{C}$  avec  $|z| < 1$ . On a  $(z^{nm})_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2} \in \ell^1((\mathbb{N}^*)^2)$ .

## 2 Propriétés

**Proposition 7.** Soit  $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$  et  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ . On a

$$(u_i)_{i \in I} \in \ell^1(I) \iff (\lambda u_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)$$

et dans ce cas

$$\sum_{i \in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i$$

**Théorème 10 (Linéarité du symbole somme).** L'ensemble  $\ell^1(I)$  un sev de  $\mathbb{C}^I$  et l'application  $(u_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} u_i$  est une forme linéaire.

**Proposition 8 (Croissance de la somme).** Soient  $(u_i)_{i \in I}$  et  $(v_i)_{i \in I}$  des familles réelles sommables telles que  $u_i \leq v_i$  pour tout  $i \in I$ . Alors  $\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$ .

**Théorème 11 (Inégalité triangulaire).** Soit  $(u_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)$ . On a

$$\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \sum_{i \in I} |u_i|$$

## 3 Regroupement, réorganisation

**Théorème 12 (Théorème de sommation par paquets).** Soient  $(I_k)_{k \in K}$  un recouvrement disjoint de  $I$  et  $(u_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)$ . Alors, on a :

- pour tout  $k \in K$ , la famille  $(u_i)_{i \in I_k}$  est sommable ;
- la famille  $\left( \sum_{i \in I_k} u_i \right)_{k \in K}$  est sommable ;

— et l'égalité

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \left( \sum_{i \in I_k} u_i \right)$$

**Théorème 13.** Soit  $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$  et  $\sigma \in \mathcal{S}(I)$  une permutation de  $I$ . On a

$$(u_i)_{i \in I} \in \ell^1(I) \iff (u_{\sigma(i)})_{i \in I} \in \ell^1(I)$$

et dans ce cas

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)}$$

## 4 Lien avec les séries

**Théorème 14.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de réels ou complexes. On a

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}) \iff \sum u_n \text{ converge absolument}$$

et dans ce cas

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

**Théorème 15.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de réels ou complexes et  $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$ . On a

$$\sum u_n \text{ converge absolument} \iff \sum u_{\sigma(n)} \text{ converge absolument}$$

et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$$



**Remarque :** Sans l'hypothèse de convergence absolue, le résultat est faux. Plus précisément, on dispose du *théorème de réarrangement de Riemann* : Soit  $(u_n)_n$  suite réelle telle que  $\sum u_n$  converge et  $\sum |u_n|$  diverge. Pour tout  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ , il existe  $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$  telle que  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \alpha$ .

## IV Applications

### 1 Sommes doubles

**Théorème 16 (Théorème de Fubini positif).** Soit  $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  une famille à valeurs dans  $[0; +\infty]$ . On a

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{i \in I} \left( \sum_{j \in J} a_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I} a_{i,j} \right)$$

**Exemples :** 1. On reprend l'exemple de  $(q^{mn})_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ . D'après le théorème de Fubini positif, on a

$$\sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} q^{mn} = \sum_{m=1}^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} q^{mn} \right) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{q^m}{1 - q^m} \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{q^m}{1 - q} < +\infty$$

2. Étude de  $\sum_{m,n \geq 2} \frac{1}{n^m}$ . D'après le théorème de Fubini positif, on a

$$\sum_{m,n \geq 2} \frac{1}{n^m} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{n^m} \right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left[ \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right] = 1$$

puis

$$\sum_{m,n \geq 2} \frac{1}{n^m} = \sum_{m=2}^{+\infty} \left( \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^m} \right) = \sum_{m=2}^{+\infty} [\zeta(m) - 1]$$

On obtient l'égalité

$$\sum_{m=2}^{+\infty} [\zeta(m) - 1] = 1$$

**Corollaire 3.** Soient  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_j)_{j \in J}$  des familles à valeurs dans  $[0; +\infty]$ . On a

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left( \sum_{i \in I} a_i \right) \left( \sum_{j \in J} b_j \right)$$

**Exemple :** D'après le théorème de Fubini positif, on a

$$\sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{m^2 n^2} = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) = \zeta(2)^2 < +\infty$$

**Théorème 17 (Théorème de Fubini).** Soit  $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J} \in \ell^1(I \times J)$ . On a

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{i \in I} \left( \sum_{j \in J} a_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I} a_{i,j} \right)$$

**Remarque :** D'après le théorème de Fubini positif, on a

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} |a_{i,j}| < +\infty \iff \sum_{i \in I} \left( \sum_{j \in J} |a_{i,j}| \right) < +\infty$$

ce qui implique  $(a_{i,j})_j$  sommable pour tout  $i \in I$  et  $\left( \sum_{j \in J} a_{i,j} \right)_{i \in I}$  sommable, et de même en échangeant les rôles de  $i$  et  $j$ .

**Corollaire 4.** Soit  $(a_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)$  et  $(b_j)_{j \in J} \in \ell^1(J)$ . Alors, on a  $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J} \in \ell^1(I \times J)$  et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left( \sum_{i \in I} a_i \right) \left( \sum_{j \in J} b_j \right)$$

## 2 Produit de Cauchy

**Définition 11.** On appelle produit de Cauchy des séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  réelles ou complexes la série  $\sum w_n$  de terme général

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

**Théorème 18.** Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries réelles ou complexes absolument convergentes. Alors, leur produit de Cauchy  $\sum w_n$  est une série absolument convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

*Démonstration.* Sans difficulté, la famille  $(u_n v_m)_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable puisque

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} |u_n v_m| = \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \right) \left( \sum_{m \in \mathbb{N}} |v_m| \right) < +\infty$$

Ainsi

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} u_n v_m = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left( \sum_{m=0}^{+\infty} v_m \right)$$

On pose  $\forall p \in \mathbb{N} \quad I_p = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n + m = p\} = \{(n, p - n), n \in \llbracket 0; p \rrbracket\}$

La famille  $(I_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est un recouvrement disjoint de  $\mathbb{N}^2$ .

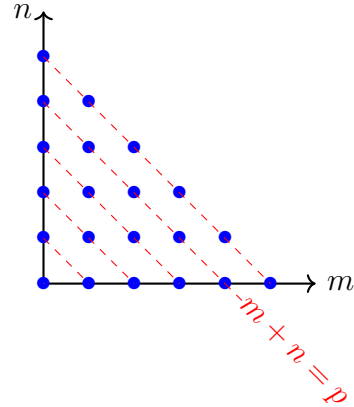


FIGURE 3 – Famille  $(I_p)_{p \in \mathbb{N}}$  partition de  $\mathbb{N}^2$

D'après le théorème de sommation par paquets, pour  $p$  entier la famille  $(u_n v_m)_{(n,m) \in I_p}$  est sommable (en fait,  $I_p$  est un ensemble fini) avec

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{(n,m) \in I_p} u_n v_m = w_p$$

puis, la série  $\sum \left( \sum_{(n,m) \in I_p} u_n v_m \right) = \sum w_p$  converge absolument et on a

$$\sum_{p=0}^{+\infty} w_p = \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} u_n v_m$$

et le résultat suit. □

**Remarque :** Sans l'hypothèse de convergence absolue, le résultat est faux en général. Considérons  $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  pour  $n$  entier non nul et  $u_0 = v_0 = 0$ . On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$$

Or, on a  $k(n-k) \leq (n-1)^2$  pour tout  $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$  d'où la divergence grossière de la série  $\sum w_n$ . En fait, les hypothèses du théorème précédent peuvent être un peu affaiblies (théorème de Mertens, hors programme).

**Exemple :** Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  avec  $|a| < 1$ ,  $|b| < 1$  et  $a \neq b$ . Les séries  $\sum a^n$  et  $\sum b^n$  convergent absolument d'où, d'après le théorème du produit de Cauchy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \right)$$

et avec un recours à l'identité de Bernoulli, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = \frac{1}{(1-a)(1-b)}$$

On peut aussi établir ce résultat naïvement, sans recours au produit de Cauchy.

# Annexes

## Produit d'ensembles

**Théorème 3.** *L'ensemble  $\mathbb{N}^2$  est dénombrable.*

*Démonstration.* Soit  $\pi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  définie pour  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  par

$$\pi(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$$

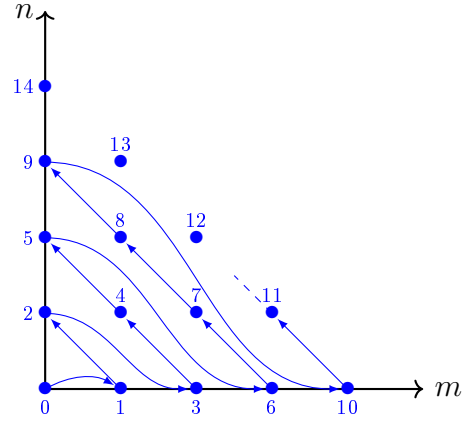


FIGURE 4 – Parcours de  $\mathbb{N}^2$  par  $\pi$

Montrons que  $\pi$  est une bijection.

On suit la trame suivante :

1. Justifier que  $\pi$  est définie de  $\mathbb{N}^2$  sur  $\mathbb{N}$ .
2. Montrer

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \pi(m, n+1) = \pi(m+1, n) + 1 \quad \text{et} \quad \pi(n+1, 0) = \pi(0, n) + 1$$

En déduire que  $\pi$  est surjective.

3. Montrer

$$\forall (m, n, m', n') \in \mathbb{N}^4 \quad m' + n' \geq m + n + 1 \implies \pi(m', n') > \pi(m, n)$$

En déduire l'injectivité de  $\pi$ .

**Étapes :** 1. Les entiers  $m+n$  et  $m+n+1$  sont consécutifs donc l'un d'eux est pair et par conséquent

L'application  $\pi$  est bien définie de  $\mathbb{N}^2$  sur  $\mathbb{N}$ .

**Variante :** On peut observer que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \pi(m, n) = n + \sum_{k=1}^{m+n} k \in \mathbb{N}$$

2. On a  $\pi(0, 0) = 0$  d'où  $0 \in \text{Im } \pi$ . On vérifie sans peine les relations demandées. Puis, pour  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ , on observe

$$\pi(m, n) + 1 = \begin{cases} \pi(n+1, 0) & \text{si } m = 0 \\ \pi(m-1, n+1) & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où  $\pi(m, n) + 1 \in \text{Im } \pi$ . Ainsi, l'ensemble  $\text{Im } \pi$  et une partie de  $\mathbb{N}$  contenant 0 et qui vérifie le principe de récurrence et on conclut

$$\text{Im } \pi = \mathbb{N}$$

3. Soient  $(m, n)$  et  $(m', n')$  dans  $\mathbb{N}^2$  avec  $(m, n) \neq (m', n')$ . Si  $m' + n' \geq m + n + 1$ , il vient

$$\begin{aligned}\pi(m', n') &= \frac{(m' + n')(m' + n' + 1)}{2} + n' \geq \frac{(m + n + 1)(m + n + 2)}{2} + n' \\ &\geq \frac{(m + n)(m + n + 1)}{2} + n + m + 1 + n' > \pi(m, n)\end{aligned}$$

c'est-à-dire  $m' + n' > m + n \implies \pi(m', n') > \pi(m, n)$

Par symétrie des rôles, on en déduit

$$m + n \neq m' + n' \implies \pi(m, n) \neq \pi(m', n')$$

Supposons  $(m, n) \neq (m', n')$ . Si  $m + n = m' + n'$ , alors  $n \neq n'$  d'où  $\pi(m, n) \neq \pi(m', n')$  et sinon on a également  $\pi(m', n') \neq \pi(m, n)$  d'après l'implication précédente. Dans tous les cas, on a donc

$$(m, n) \neq (m', n') \implies \pi(m, n) \neq \pi(m', n')$$

Ainsi

L'application  $\pi$  est une injection de  $\mathbb{N}^2$  sur  $\mathbb{N}$ .

**Variante :** Pour montrer l'inégalité demandée, on peut aussi écrire

$$\pi(m', n') = n' + \sum_{k=1}^{m'+n'} k \geq n' + \sum_{k=1}^{m+n+1} k = m + 1 + n' + n + \sum_{k=1}^{m+n} k = m + 1 + n' + \pi(m, n)$$

Ainsi, l'application  $\pi$  est surjective et injective et réalise donc une bijection de  $\mathbb{N}^2$  dans  $\mathbb{N}$ .  $\square$