ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°39

Exercice 1 (***)

Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ croissante. Pour $x \in\,]\,a\,;b\,[$, on note $\delta(x) = f(x^+) - f(x^-)$.

1. Pour n entier non nul, montrer que $\mathrm{E}_n = \left\{x \in\,]\,a\,;b\,[\quad | \quad \delta(x) > \dfrac{1}{n}\right\}$ est fini.
2. En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.
3. Généraliser ce résultat pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. Soient $x_1 < \ldots < x_p$ des éléments de E_n et soient $y_0, \ldots, y_p$ des réels tels que

$$a \leqslant y_0 < x_1 < y_1 < x_1 < \ldots < x_p < y_p \leqslant b$$

Par définition de E_n et croissance de f, on a

$$\forall k \in [\![\, 1\,;\,p\,]\!] \qquad f(y_k) - f(y_{k-1}) \geqslant \frac{1}{n}$$

D'où
$$f(b) - f(a) \geqslant f(y_p) - f(y_0) \geqslant \sum_{k=1}^{p} [f(y_k) - f(y_{k-1})] \geqslant \frac{p}{n}$$

On en déduit $p \leqslant n\,[f(b) - f(a)]$ ce qui prouve

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier non nul, l'ensemble } \mathrm{E}_n \text{ est fini.}}$$

2. L'ensemble des points des discontinuités D de f est formé éventuellement des points a et b et des points $x \in\,]\,a\,;b\,[$ tels que $\delta(x) > 0$ d'où

$$\mathrm{D} \subset \{a, b\} \cup \bigcup_{n \geqslant 1} \mathrm{E}_n$$

Ainsi, l'ensemble D est contenu dans un ensemble qui est une union dénombrable d'ensemble fini donc au plus dénombrable. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble des points de discontinuité de } f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R} \text{ est au plus dénombrable.}}$$

3. Notons D l'ensemble des points de discontinuités de f et D_n l'ensemble des points de discontinuités de $f_{|[\,-n\,;n\,]}$ avec n entier. On a $\mathrm{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{D}_n$ union dénombrables d'ensembles au plus dénombrables d'où

$$\boxed{\text{L'ensemble des points de discontinuité de } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est au plus dénombrable.}}$$

Exercice 2 (***)

Un nombre complexe est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme à coefficients rationnels. Montrer que l'ensemble $\mathscr{A}$ des nombres algébriques est dénombrable.

Corrigé : L'ensemble des polynômes à coefficients rationnels $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ peut s'écrire $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[\mathrm{X}]$. Or, pour n entier, l'ensemble $\mathbb{Q}_n[\mathrm{X}]$ est en bijection avec $\mathbb{Q}^{n+1}$ qui est dénombrable comme produit fini d'ensembles dénombrables. Ainsi, l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[\mathrm{X}]$ est une union dénombrable d'ensemble dénombrable ce qui prouve que $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ est dénombrable. Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$, notons $\mathrm{Z}(\mathrm{P})$ l'ensemble des racines complexes de P. Pour $\mathrm{P} \neq 0$, l'ensemble $\mathrm{Z}(\mathrm{P})$ est un ensemble fini. Or, on a

$$\mathscr{A} = \bigcup_{\mathrm{P}\in\mathbb{Q}[\mathrm{X}]\smallsetminus\{0\}} \mathrm{Z}(\mathrm{P})$$

Ainsi, l'ensemble des nombres algébriques est une union dénombrable d'ensemble fini donc est au plus dénombrable. L'ensemble $\mathscr{A}$ est clairement infini puisqu'il contient $\mathbb{Q}$ par exemple et on conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.}}$$

Remarque : Comme l'ensemble $\mathbb{R}$ est indénombrable, il en résulte qu'il existe des nombres *transcendants*, *i.e.* qui ne sont pas algébriques.

Exercice 3 (**)

Calculer
$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{p!q!(p+q+1)}$$

Corrigé : Notons

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \qquad u_{p,q} = \frac{1}{p!q!(p+q+1)} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathrm{N} \qquad \mathrm{I}_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q=n\}$$

La famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est à termes positifs et la famille $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement disjoint de $\mathbb{N}^2$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \{(p, n-p),\ p \in [\![\, 0\,;\, n\,]\!]\}$$

Par suite
$$\sum_{(p,q)\in\mathrm{I}_n} \frac{1}{p!q!(p+q+1)} = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!(n-p)!(n+1)} = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = \frac{2^n}{(n+1)!}$$

et d'après le théorème de sommation par paquets pour une famille à termes positifs

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{p!q!(p+q+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ainsi
$$\boxed{\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{p!q!(p+q+1)} = \frac{1}{2}\,(\mathrm{e}^2 - 1)}$$

Variante : On peut aussi observer que pour p et q entiers, on a

$$\frac{1}{p+q+1} = \int_0^1 t^{p+q}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^p t^q\,\mathrm{d}t$$

puis conclure avec le théorème de Fubini en justifiant la permutation des symboles Σ et $\displaystyle\int$.

Exercice 4 (**)

Pour t réel, on note $$\mathrm{S}(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{1-t^n}$$

1. Préciser l'ensemble de définition D de S.

2. Montrer $$\forall t\in\mathrm{D}\qquad \mathrm{S}(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}d(n)\,t^n$$

   où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}$.

Corrigé : 1. Notons $$\forall (n,t)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}\qquad f_n(t)=\frac{t^n}{1-t^n}$$

L'application f_n n'est pas définie en $t=1$ et en $t=-1$ pour les n impairs. Pour $|t|>1$, on a $f_n(t)\underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow}0$ d'où la divergence grossière de la série définissant S. Enfin, pour $|t|<1$, on a

$$\left|\frac{t^n}{1-t^n}\right|\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{O}\left(|t|^n\right)$$

d'où la convergence absolue de la série. Ainsi

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de S est } \mathrm{D}=\,]-1\,;1\,[.}$$

Remarque : Si on préfère écrire des équivalents plutôt que des grand O, il faut distinguer t non nul et t nul.

2. On a $$\forall t\in\mathrm{D}\qquad \mathrm{S}(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{1-t^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}t^{kn}\right)$$

Vérifions la sommabilité de la famille $\left(|t|^{kn}\right)_{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$. Comme $|t|^n<1$ pour n entier non nul, on a

$$\forall n\geqslant 1\qquad \sum_{k=1}^{+\infty}|t|^{kn}=\frac{|t|^n}{1-|t|^n}\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{O}(|t|^n)$$

et comme $\sum\limits_{n\geqslant 1}|t|^n$ converge en tant que série géométrique de raison $|t|<1$, on a bien la sommabilité de $\left(|t|^{kn}\right)_{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$. Posons

$$\forall p\in\mathbb{N}^*\qquad \mathrm{A}_p=\left\{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2\ \mid\ k\times n=p\right\}$$

La famille $(\mathrm{A}_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est un recouvrement disjoint de $(\mathbb{N}^*)^2$ et on a

$$\forall p\in\mathbb{N}^*\qquad \mathrm{A}_p=\{(k,p/k),\ k\in[\![1\,;p]\!]\quad\text{et}\quad k\text{ divise }p\}$$

D'après le théorème de sommation par paquets, on obtient

$$\forall t\in\mathrm{D}\qquad \mathrm{S}(t)=\sum_{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}t^{kn}=\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,n)\in\mathrm{A}_p}t^{kn}\right)=\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{k|p}1\right)t^p$$

Autrement dit $$\boxed{\forall t\in\,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{S}(t)=\sum_{p=1}^{+\infty}d(p)t^p}$$

Exercice 5 (**)

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Justifier l'existence de $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2 - z^2}$ puis montrer

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 - z^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \zeta(2k+2) z^{2k} \quad \text{avec} \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Corrigé : Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. La sommabilité de $\left(\dfrac{1}{n^2 - z^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ équivaut à la convergence absolue de $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^2 - z^2}$ et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{1}{|n^2 - z^2|} \leqslant \frac{1}{n^2 - |z|^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où la convergence absolue par comparaison et critère de Riemann. Puis, il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - z^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{n}\right)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^{2k}$$

Vérifions la sommabilité de la famille concernée afin de pouvoir appliquer le théorème de Fubini. La série géométrique $\sum\limits_{k \geqslant 0} \left(\dfrac{|z|}{n}\right)^{2k}$ converge avec

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{|z|}{n}\right)^{2k} = \frac{1}{1 - \left(\frac{|z|}{n}\right)^2}$$

puis la série

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{|z|}{n}\right)^2} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2 - |z|^2}$$

converge d'après les résultats antérieurs. Ainsi, d'après le théorème de Fubini, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - z^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2(k+1)}} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2k} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2(k+1)}}$$

On conclut

$$\boxed{\text{La famille } \left(\frac{1}{n^2 - z^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est sommable avec } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 - z^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \zeta(2(k+1)) z^{2k}.}$$

Exercice 6 (****)

Soit n entier non nul, α réel et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Étudier la sommabilité de la famille

$$\left(\frac{1}{\|x\|^\alpha}\right)_{x \in \mathbb{Z}^n \smallsetminus \{0_{\mathbb{Z}^n}\}}$$

Corrigé : Les normes dans $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. Ainsi, il existe $a, b > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad a\|x\| \leqslant \|x\|_\infty \leqslant b\|x\|$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \frac{1}{b^\alpha \|x\|^\alpha} \leqslant \frac{1}{\|x\|_\infty^\alpha} \leqslant \frac{1}{a^\alpha \|x\|^\alpha}$$

Par suite

$$\left(\frac{1}{\|x\|^\alpha}\right)_{x \in \mathbb{Z}^n \smallsetminus \{0_{\mathbb{Z}^n}\}} \text{ sommable} \iff \left(\frac{1}{\|x\|_\infty^\alpha}\right)_{x \in \mathbb{Z}^n \smallsetminus \{0_{\mathbb{Z}^n}\}} \text{ sommable}$$

Posons $\qquad \forall p \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_p = \{x \in \mathbb{Z}^n \quad | \quad \|x\|_\infty = p\}$

La famille $(\mathrm{I}_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est un recouvrement disjoint de $\mathbb{Z}^n \setminus \{0_{\mathbb{Z}^n}\}$. On a

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{x\in\mathrm{I}_p} \frac{1}{\|x\|_\infty^\alpha} = \frac{\mathrm{Card}\ \mathrm{I}_p}{p^\alpha}$$

Pour p entier, on a $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{p} \mathrm{I}_k = [\![-p\,;\, p]\!]^n$ et $\mathrm{I}_p = \left(\displaystyle\bigcup_{k=1}^{p} \mathrm{I}_k\right) \setminus \left(\displaystyle\bigcup_{k=0}^{p-1} \mathrm{I}_k\right)$

d'où $\qquad \mathrm{Card}\ \mathrm{I}_p = \mathrm{Card}\,[\![-p\,;\, p]\!]^n - \mathrm{Card}\,[\![-(p-1)\,;\, p-1]\!]^n = (2p+1)^n - (2p-1)^n$

puis $\qquad (2p+1)^n - (2p-1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2p)^{n-k}(1-(-1)^k) = 2n(2p)^{n-1} + \mathrm{o}_{p\to+\infty}(p^{n-1})$

Par conséquent

$$\sum_{x\in\mathrm{I}_p} \frac{1}{\|x\|_\infty^\alpha} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{n2^n}{p^{\alpha-n+1}} > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{n2^n}{p^{\alpha-n+1}} < +\infty \iff \alpha - n + 1 > 1$$

D'après le théorème de sommation par paquets, on conclut

$$\boxed{\text{La famille } \left(\frac{1}{\|x\|^\alpha}\right)_{x\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0_{\mathbb{Z}^n}\}} \text{ est sommable si et seulement si } \alpha > n.}$$