ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°38

Exercice 1 (**)

Étudier selon $\alpha > 1$ la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\right)$ et en cas de finitude, exprimer sa somme à l'aide de la fonction ζ de Riemann.

Exercice 2 (***)

Soit α réel. Étudier la somme $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$.

Exercice 3 (***)

Soit α réel. Étudier la somme $\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}}\frac{1}{m^\alpha+n^\alpha}$.

Exercice 4 (***)

Montrer l'égalité
$$2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n^2}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{2^n}$$

Exercice 5 (***)

On précise que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Calculer
$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$$
En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n(n+1)}$.

Exercice 6 (***)

On précise que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$. Calculer
$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2},\ m\wedge n=1}\frac{1}{n^2m^2}$$

Exercice 7 (***)

Soit $\sigma:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ bijective. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Exercice 8 (****)

Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective. Étudier la nature de $\sum \dfrac{\sigma(n)}{n!}$.