

Feuille d'exercices n°39

Exercice 1 (***)

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ croissante. Pour $x \in]a; b[$, on note $\delta(x) = f(x^+) - f(x^-)$.

1. Pour n entier non nul, montrer que $E_n = \left\{x \in]a; b[\mid \delta(x) > \frac{1}{n}\right\}$ est fini.
2. En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.
3. Généraliser ce résultat pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Indications : 1. Pour n entier non nul, considérer $x_1 < \dots < x_p$ dans E_n puis $0 \leq y_0 < x_1 < y_1 < x_1 < \dots < x_p < y_p \leq b$ puis $f(y_k) - f(y_{k-1})$ pour $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$.
2. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est inclus dans un ensemble au plus dénombrable décrit à l'aide des ensembles E_n .
3. Considérer les restrictions $f|_{[-n; n]}$ pour n entier.

Exercice 2 (***)

Un nombre complexe est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme à coefficients rationnels. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ des nombres algébriques est dénombrable.

Indications : Avec l'égalité $\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X]$, établir que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable puis notant $Z(P)$ l'ensemble des racines complexes de P pour $P \in \mathbb{Q}[X]$, décrire $\mathcal{A}$ à l'aide de $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 3 (**)

Calculer
$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{p!q!(p+q+1)}$$

Indications : Considérer $I_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p + q = n\}$ pour n entier et utiliser le théorème de sommation par paquets.

Exercice 4 (**)

Pour t réel, on note
$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{1 - t^n}$$

1. Préciser l'ensemble de définition D de S .
2. Montrer
$$\forall t \in D \quad S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) t^n$$

où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}$.

Indications : 1. Distinguer $|t| < 1$, $|t| = 1$ et $|t| > 1$.
2. Considérer le recouvrement disjoint $(A_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ de $(\mathbb{N}^*)^2$ avec $A_p = \{(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid k \times n = p\}$.

Exercice 5 (**)

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Justifier l'existence de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 - z^2}$ puis montrer

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 - z^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \zeta(2k+2) z^{2k} \quad \text{avec} \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Indications : Utiliser le théorème de Fubini.

Exercice 6 (****)

Soit n entier non nul, α réel et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Étudier la sommabilité de la famille

$$\left(\frac{1}{\|x\|^\alpha} \right)_{x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0_{\mathbb{Z}^n}\}}$$

Indications : Se ramener au cas de la norme $\|\cdot\|_\infty$ puis considérer le recouvrement disjoint $(I_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{Z}^n \setminus \{0_{\mathbb{Z}^n}\}$ avec $I_p = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid \|x\|_\infty = p\}$.