ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026 27/11/2025

Devoir en temps libre n°08

Problème I

Étudier la sommabilité de $\left(\dfrac{1}{m^2+n^2}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

Problème II

Soient $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(v_i)_{i\in\mathrm{I}}$ des familles à valeurs dans $[\,0\,;+\infty\,]$ et $\lambda\in[\,0\,;+\infty\,]$. Dans ce qui suit, on n'utilisera pas le théorème de sommation par paquets.

1. Établir
$$\sum_{i\in\mathrm{I}}\lambda u_i=\lambda\sum_{i\in\mathrm{I}}u_i$$

2. Établir
$$\sum_{i\in\mathrm{I}}(u_i+v_i)=\sum_{i\in\mathrm{I}}u_i+\sum_{i\in\mathrm{I}}v_i$$

Problème III

Soit $f\in\mathscr{C}_{pm}([\,1\,;\mathrm{e}\,[\,,\mathbb{R})$, intégrable sur $[\,1\,;\mathrm{e}\,[$. Établir
$$\int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} t^{\frac{1}{n}}f(t)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_1^{\mathrm{e}}f(t)\,\mathrm{d}t$$

Problème IV

On pose
$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad \mathrm{I}_n=\int_0^1\frac{1+t^{n+1}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que pour n entier, l'intégrale I_n est bien définie.

2. Montrer
$$\mathrm{I}_n\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

   Dans ce qui suit, on pose $\mathrm{J}_n=1-\mathrm{I}_n$ pour n entier.

3. Établir
$$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad n^2\mathrm{J}_n=\int_0^1\frac{n\left(1-u^{\frac{1}{n}}\right)}{1+u}u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u$$

4. Justifier
$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad 1-\mathrm{e}^x\leqslant -x$$

5. En déduire la convergence de la suite $(n^2\mathrm{J}_n)_{n\geqslant 1}$ vers une limite dont on donnera une écriture intégrale.

6. Déterminer un développement asymptotique à la précision $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ de I_n pour $n\to+\infty$.