Feuille d'exercices n°42

Exercice 1 (***)

Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\int_0^1 t^n \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : Pour n entier non nul, avec le changement de variable $u = t^n$, il vient

$$\int_0^1 t^n \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 u^{\frac{1}{n}} \frac{-\ln(u)}{n(1-u^{\frac{1}{n}})}\,\mathrm{d}u$$

On a $\qquad \forall u \in \left]\,0\,;1\,\right] \qquad n(1-u^{\frac{1}{n}}) = n(1-\mathrm{e}^{\frac{\ln(u)}{n}}) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\ln(u)$

L'inégalité de concavité $1-\mathrm{e}^x \leqslant -x$ pour x réel ne permet pas de conclure. Une autre inégalité de concavité donne

$$\forall v \in [\,0\,;1\,] \qquad 1 - v^n \leqslant n(1-v)$$

Puis $\qquad \forall u \in \left]\,0\,;1\,\right[\qquad u^{\frac{1}{n}} \frac{-\ln(u)}{n(1-u^{\frac{1}{n}})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant u^{\frac{1}{n}} \frac{-\ln(u)}{n(1-u^{\frac{1}{n}})} \leqslant \frac{-\ln(u)}{1-u}$

La dominante $u \mapsto \dfrac{-\ln(u)}{1-u}$ est continue sur $\left]\,0\,;1\,\right[$, prolongeable par continuité en 1 et vérifiant $\dfrac{-\ln(u)}{1-u} \underset{u\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}}\right)$ d'où son intégrabilité sur $\left]\,0\,;1\,\right[$. Par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_0^1 t^n \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

Variante : On a $\qquad \displaystyle\int_0^1 t^n \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 -\ln(t) t^n \sum_{k=0}^{+\infty} t^k\,\mathrm{d}t$

Après intégration par parties, on trouve

$$\sum \int_0^1 t^{n+k}\ln(t)\,\mathrm{d}t = \sum \frac{1}{(k+n)^2}$$

ce qui justifie l'intégration terme à terme d'où

$$\int_0^1 t^n \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+n)^2} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Par comparaison série/intégrale, on obtient pour $n \geqslant 2$

$$\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

et on en déduit l'équivalent attendu.

Exercice 2 (***)

Déterminer $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{1}{\sqrt{t}}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$$

Corrigé : On pose

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \left]\,0\,;+\infty\,\right[\qquad f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} \mathbb{1}_{[\,0\,;n\,]}(t)$$

On a $$\forall t > 0 \qquad f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$$

En développant le binôme, on montre

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall t > 0 \qquad \left(1+\frac{t}{n}\right)^{n} \geqslant 1+t$$

Ainsi $$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \left]\,0\,;+\infty\,\right[\qquad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}$$

Et cette dominante est intégrable sur $\left]\,0\,;+\infty\,\right[$ puisque $\dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t)} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$.
Ainsi, par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_0^n \frac{1}{\sqrt{t}}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t}$$

Exercice 3 (***)

Déterminer $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{n} \mathrm{e}^{t\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t$$

Corrigé : On pose

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad f_n(t) = \left(1-\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{n} \mathrm{e}^{t\sqrt{n}} \mathbb{1}_{[\,0\,;\sqrt{n}\,]}(t)$$

Pour $t \geqslant 0$ et $n \geqslant t$, on a

$$f_n(t) = \exp\left[n\ln\left(1-\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + t\sqrt{n}\right] = \exp\left[n\left(-\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) + t\sqrt{n}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

L'inégalité classique de concavité $\ln(1-u) \leqslant -u$ pour $u < 1$ ne suffit pas puisqu'elle fournit simplement $f_n(t) \leqslant 1$ pour tout $(n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$, dominante qui n'est pas intégrable. On pose

$$\forall x \in [\,0\,;1\,[\qquad h(x) = \ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}$$

La fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ par théorèmes généraux avec

$$\forall x \in [\,0\,;1\,[\qquad h'(x) = -\frac{1}{1-x} + 1 + x = -\frac{x^2}{1-x}$$

Pour $x \in [\,0\,;1\,[$, on a clairement $h'(x) \leqslant 0$ et par conséquent h décroît avec $h(0) = 0$ d'où

$$\forall x \in [\,0\,;1\,[\qquad \ln(1-x) \leqslant -x - \frac{x^2}{2}$$

On en déduit $$\forall t \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

La dominante $t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{t\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t}$$

Remarque : On verra lors de l'étude des *séries entières* qu'on dispose de l'égalité

$$\forall x \in \,]-1\,;1\,[\qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Ainsi $$\forall x \in [\,0\,;1\,[\qquad \ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} = -\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \leqslant 0$$

d'où le choix précédent pour la dominante.

Exercice 4 (****)

Soient les suites réelles $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ avec $a \geqslant b > 0$ et

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

On pose $$\mathrm{I}(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$$

1. Montrer $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad b_n \leqslant a_n$$

   En déduire la monotonie des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ puis leur convergence vers une limite commune notée $\mathrm{M}(a,b)$.
2. Justifier la convergence de l'intégrale $\mathrm{I}(a,b)$.
3. Avec le changement de variables $t = \dfrac{1}{2}\left(u - \dfrac{ab}{u}\right)$, établir

   $$\mathrm{I}\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \mathrm{I}(a,b)$$

4. Montrer $$\mathrm{I}(a,b) = \frac{\pi}{\mathrm{M}(a,b)}$$

Corrigé : 1. Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont positives par récurrence immédiate. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, on a les équivalences

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy} \iff \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geqslant xy \iff (x-y)^2 \geqslant 0$$

En appliquant l'inégalité de gauche pour $(x,y) = (a_n, b_n)$, il s'ensuit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad b_n \leqslant a_n}$$

puis $$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leqslant 0 \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geqslant \sqrt{b_n^2} = b_n$$

Ainsi $$\boxed{\text{La suite } (a_n)_n \text{ décroît et la suite } (b_n)_n \text{ croît.}}$$

La suite $(a_n)_n$ est décroissante minorée, la suite $(b_n)_n$ est croissante majorée. Par limite monotone, ces suites sont convergentes et notant $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty}$, il vient

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell = \frac{\ell + \ell'}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \ell = \ell'$$

Ainsi $$\boxed{a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{M}(a,b) \quad \text{et} \quad b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{M}(a,b)}$$

Remarque : Cette limite commune est appelée *moyenne arithmético-géométrique* ou aussi *moyenne de Gauss.*

2. On pose $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \frac{1}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$$

On a $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, paire et $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Par comparaison et critère de Riemann, on conclut

$$\boxed{\text{L'intégrale } \mathrm{I}(a,b) \text{ converge.}}$$

3. On pose $$\forall u > 0 \qquad \varphi(u) = \frac{1}{2}\left(u - \frac{ab}{u}\right)$$

L'application φ réalise une bijection croissante de $\mathscr{C}^1$ de $]\,0\,;+\infty\,[$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Tous calculs effectués, d'après le théorème de changement de variables, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}} \qquad \text{et} \quad \mathrm{I}\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$$

sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. Par parité de l'intégrande, on conclut

$$\boxed{\mathrm{I}\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \mathrm{I}(a,b)}$$

Remarque : Le changement de variable non trivial utilisé plus haut est appelé *transformée de Landen.*

4. D'après la relation précédemment établie, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}(a_n, b_n) = \mathrm{I}(a_{n+1}, b_{n+1})$$

On pose $$\forall (n,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R} \qquad f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{(a_n^2+t^2)(b_n^2+t^2)}}$$

On a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\mathrm{M}(a,b)+t^2} \quad \text{et} \quad \forall (n,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R} \qquad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{1}{b^2+t^2}$$

Comme $t \mapsto \dfrac{1}{b^2+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on obtient par convergence dominée

$$\mathrm{I}(a_n,b_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{M}(a,b)^2+t^2} = \frac{1}{\mathrm{M}(a,b)}\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{\mathrm{M}(a,b)}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{I}(a,b) = \frac{\pi}{\mathrm{M}(a,b)}}$$

Exercice 5 (**)

Établir
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Corrigé : L'intégrande est continue par morceaux sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et on a
$$\forall t > 0 \qquad \frac{\sin(t)}{\mathrm{e}^t - 1} = \frac{\sin(t)\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} = \sin(t)\mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nt} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sin(t)\mathrm{e}^{-(n+1)t}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t$ converge et après intégration par parties, on trouve
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Avec l'inégalité classique $|\sin(t)| \leqslant t$ pour t réel, on a par comparaison la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(t)|\,\mathrm{e}^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t$ pour n entier avec
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{+\infty} |\sin(t)|\,\mathrm{e}^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2}$$

et on en déduit la convergence de la série $\displaystyle\sum\int_0^{+\infty} |\sin(t)|\,\mathrm{e}^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t$. D'après le théorème d'intégration terme à terme, on obtient la convergence absolue de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t$ avec
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\sin(t)\mathrm{e}^{-(n+1)t}\right)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sin(t)\mathrm{e}^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t$$

Par convergence absolue, on peut écrire
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{+\infty}\sin(t)\mathrm{e}^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-((n+1)-\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{(n+1)-\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{(n+1)^2+1}\end{aligned}$$

On conclut
$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}}$$

Exercice 6 (***)

En considérant $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t$ pour n entier, déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)}\,\mathrm{d}u$.

Corrigé : Pour n entier, l'intégrande est continue sur $[\,0\,;1\,[$ et prolongeable par continuité en 1 donc intégrable sur $[\,0\,;1\,[$. On observe
$$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad \frac{t^n - t^{2n}}{1-t} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Toutefois, aucune dominante intégrable indépendante de n ne semble se dévoiler. Pour n entier non nul, transformons l'intégrale avec le changement de variables $u = t^n$. On obtient (intégrales de même nature donc convergentes et par conséquent égales)
$$\int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{u-u^2}{n(1-u^{\frac{1}{n}})}u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{1-u}{n(1-u^{\frac{1}{n}})}u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u$$

Or $\qquad \forall u \in]\,0\,;1\,] \qquad n(1-u^{\frac{1}{n}}) = n\left(1-\mathrm{e}^{\frac{\ln(u)}{n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\ln(u)$

D'où $\qquad \forall u \in]\,0\,;1\,[\qquad \dfrac{1-u}{n(1-u^{\frac{1}{n}})}u^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{u-1}{\ln(u)}$

Avec l'inégalité $1-v^n \leqslant n(1-v)$ pour $v \in [\,0\,;1\,]$, il vient

$$\forall u \in]\,0\,;1\,[\qquad 0 \leqslant \frac{1-u}{n(1-u^{\frac{1}{n}})}u^{\frac{1}{n}} \leqslant 1$$

La dominante est clairement intégrable sur $]\,0\,;1\,[$ et par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t^n-t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)}\,\mathrm{d}u}$$

On peut procéder très différemment. On a

$$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad \frac{t^n-t^{2n}}{1-t} = \frac{t^n-1}{1-t} + \frac{1-t^{2n}}{1-t} = -\sum_{k=0}^{n-1} t^k + \sum_{k=0}^{2n-1} t^k = \sum_{k=n}^{2n-1} t^k$$

Par suite $\qquad \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n-t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=n}^{2n-1} t^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=n}^{2n-1}\int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}$

On reconnaît alors une somme de Riemann avec

$$\int_0^1 \frac{t^n-t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$$

On conclut $\qquad \boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)}\,\mathrm{d}u = \ln 2}$

Exercice 7 (***)

Déterminer la nature de la série de terme général $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t+\ldots+t^{n-1}}\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : On a $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n(1-t)}{1-t^n}\,\mathrm{d}t$

Soit n entier non nul. Avec le changement de variables $u = t^n$, on obtient

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{1-u^{\frac{1}{n}}}{1-u}u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u$$

On a $\qquad \forall u \in]\,0\,;1\,[\qquad n\dfrac{1-u^{\frac{1}{n}}}{1-u}u^{\frac{1}{n}} = n\dfrac{1-\mathrm{e}^{\frac{\ln u}{n}}}{1-u}u^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{-\ln u}{1-u}$

et avec l'inégalité de convexité $1-\mathrm{e}^x \leqslant -x$ pour tout x réel, on obtient

$$\forall u \in]\,0\,;1\,[\qquad 0 \leqslant n\frac{1-\mathrm{e}^{\frac{\ln u}{n}}}{1-u}u^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{-\ln u}{1-u}$$

La dominante $u \mapsto \dfrac{-\ln u}{1-u}$ est continue sur $]\,0\,;1\,[$, prolongeable par continuité en 1 et vérifiant $\dfrac{-\ln u}{1-u} \underset{u\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}}\right)$ d'où son intégrabilité sur $]\,0\,;1\,[$. Par convergence dominée , on en déduit

$$n^2 \mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{-\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u$$

Ainsi $$\boxed{\text{La série } \sum \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+\ldots+t^{n-1}}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Remarque : D'après l'inégalité arithmético-géométrique, on a

$$\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} t^k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} t^k \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} t^k} = t^{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k} = t^{\frac{n-1}{2}}$$

D'où $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{n+1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{n(2n+3)}$$

Le résultat suit par comparaison.